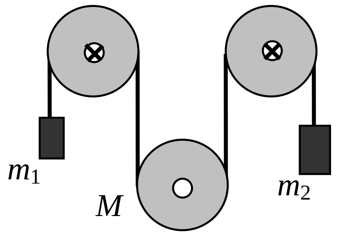
## Задача 1: «Три блока».



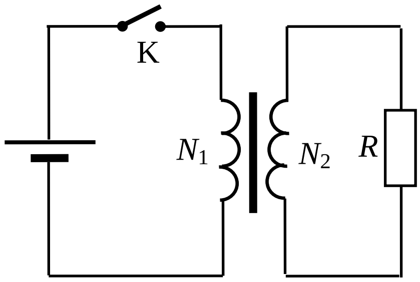

Легкая практически нерастяжимая веревка перекинута через три одинаковых блока, два из которых закреплены (не могут вращаться), а третий может вращаться практически без трения на неподвижной горизонтальной оси. Плоскости блоков вертикальны, как и все участки веревки, не лежащие на блоках. Для того, чтобы веревка не соскальзывала с блоков, их боковые поверхности снабжены направляющими канавками, причем коэффициент трения между веревкой и поверхностью канавок равен $\mu = \frac{\ln 2}{\pi}$. Масса вращающегося блока $M = 4{,}8$ кг. При расчете его момента инерции наличием канавки и центрального отверстия можно пренебречь (то есть блок можно считать однородным диском). К левому (см. рисунок) концу веревки подвешен груз массой $m_1 = 200$ г, а к правому – груз массой $m_2 > m_1$. Систему изначально удерживают в состоянии покоя.

1) Во сколько раз отличаются модули сил натяжения участков веревки, скользящей по неподвижному блоку, по разные стороны от такого блока? Выразите отношение модулей сил натяжения через коэффициент трения, и вычислите величину этого отношения. (4 балла)
2) При какой массе $m_2$ система после отпускания придет в движение? Выразите массу $m_2$ через величины, заданные в условии задачи. Ответ дайте в виде формулы. (3 балла)
3) Вычислите критическое значение массы $m_2$, при превышении которого грузы и веревка придут в движение. Ответ выразите в граммах. (1 балл)
4) Найдите модуль ускорения, с которым начнет двигаться после отпускания системы груз массой $m_2$, если его масса будет в $n = 2$ раза больше величины, найденной в пункте 3. Выразите ответ через величины, заданные в условии задачи. Ответ дайте в виде формулы. (4 балла)
5) Вычислите модуль ускорения, найденного в пункте 4, выразив его в единицах (долях) ускорения свободного падения $g$. (1 балл)
6) Найдите модуль ускорения, с которым начнет двигаться после отпускания системы груз массой $m_2$, если его масса будет в $k = 4$ раза больше величины, найденной в пункте 3. Выразите ответ через величины, заданные в условии задачи. Ответ дайте в виде формулы. (4 балла)
7) Вычислите модуль ускорения, найденного в пункте 6, выразив его в единицах (долях) ускорения свободного падения $g$. (1 балл)
8) При условиях, сформулированных в пункте 6, вычислите модуль касательной составляющей ускорения точек обода вращающегося блока в момент сразу после начала движения. Ответ выразите в единицах (долях) ускорения свободного падения $g$. (4 балла)
9) Допустим, что величина массы $m_2$ превышает критическое значение, найденное в пункте 3, и что при этом мы можем изменять массу свободно вращающегося блока $M$. При какой величине $M$ характер относительного движения веревки и вращающегося блока не будет качественно изменяться при изменении $m_2$? Запишите ответ в виде формулы, выразив его через величины, заданные в условии задачи. (4 балла)
10) Во сколько раз будут отличаться модули сил натяжения веревки по разные стороны от вращающегося блока, если масса $m_2$ будет иметь значение из пункта 4, а сам этот блок будет заменен на более легкий, с массой в $k = 4$ раза меньше, чем задано в условии задачи? Коэффициент трения между блоком и веревкой остается прежним. Ответ выразите в виде простой дроби. (4 балла)

ВСЕГО за задачу: 30 баллов.

**Задача 2: «Внезапное включение».**

Трансформатор состоит из тороидального ферромагнитного сердечника (магнитная проницаемость $\mu >> 1$) длиной $l < 1$ м и площадью поперечного сечения $S$, первичной обмотки с числом витков $N_1 = 20$ и вторичной обмотки с числом витков $N_2 = 100$. Этот трансформатор включен в цепь, схема которой показана на рисунке. ЭДС источника $\mathcal{E} = 24$ В, его внутреннее сопротивление $r = 4$ Ом, ключ К вначале разомкнут. Вторичная обмотка подключена к резистору сопротивлением $R = 100$ Ом. Изначально ток в обеих обмотках отсутствует. В некоторый момент времени ключ К замыкают. При этом сопротивление контакта ключа уменьшается




практически до нуля за время, существенно меньшее времени $\tau \equiv \frac{\mu_0 \mu N_1^2 S}{lr} = 0{,}05$ с (но не мгновенно!). Омические сопротивления обмоток намного меньше 1 Ом. Рассеянием магнитного потока в сердечнике можно пренебречь.

1) Запишите формулу, которая связывает поток Ф вектора магнитной индукции через сечение сердечника с силами токов $I_1$ и $I_2$, протекающих в первичной и во вторичной обмотках трансформатора в некоторый момент времени. Положительные направления токов в обмотках считать сонаправленными. (1 балл)
2) Рассмотрим цепь первичной обмотки, состоящую из этой обмотки и внутреннего сопротивления источника. Пусть в процессе замыкания ключа напряжение на входе этой цепи изменяется по некоторому закону $U_1 = U(t)$. Запишите полную систему дифференциальных уравнений первого порядка для функций $I_1(t)$ и $I_2(t)$, описывающих законы изменения тока в первичной и вторичной обмотках. (2 балла)
3) Каковы должны быть начальные значения токов $I_1(0)$ и $I_2(0)$ (то есть начальные условия, которые необходимы для решения системы уравнений, полученных в предыдущем пункте)? (1 балл)
4) Во сколько раз отличается сила тока, текущего во вторичной обмотке по истечении времени $t_1 = 2\tau$ и $t_2 = 4\tau$ после начала включения напряжения $U(t)$? В ответе укажите приближенное численное значение отношения $\frac{I_2(2\tau)}{I_2(4\tau)}$. (3 балла)
5) Чему примерно будет равна максимальная абсолютная величина силы тока, протекающего во вторичной обмотке, после замыкания ключа? Запишите формулу, выражающую $I_2^{\max}$ через величины, заданные в условии задачи, и получите приближенный численный ответ. (4 балла)
6) Найдите закон изменения $I_2(t)$ при $t > \tau$. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. (3 балла)
7) Постройте примерный график зависимости $I_2(t)$ от момента начала замыкания ключа до момента времени $T = 0{,}5$ с. (3 балла)
8) Чему будет равна максимальная абсолютная величина силы тока, протекающего в первичной обмотке после замыкания ключа? Запишите формулу, выразив $I_1^{\max}$ через величины, заданные в условии задачи, и получите численный ответ. (2 балла)
9) Найдите закон изменения $I_1(t)$ при $t > \tau$. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. (3 балла)
10) Постройте примерный график зависимости $I_1(t)$ от момента начала замыкания ключа до момента времени $T = 0{,}5$ с. (3 балла)

ВСЕГО за задачу: 25 баллов.

## Задача 3: «Планета Кронос».

Представим себе, что некоторая цивилизация оставила в Солнечной системе искусственную планету. Поскольку ее орбита лежит вне орбиты Плутона, назовем ее «Кронос». Орбита Кроноса – практически круговая радиусом $R_K = 50$ а.е. (1 астрономическая единица – расстояние, примерно равное среднему расстоянию от Земли до Солнца), сама планета – шар радиусом $r = 5000$ км из твердого, хорошо проводящего теплоту материала, средняя плотность которого $\rho \approx 9$ г/см$^3$, а средняя удельная теплоемкость $c \approx 0{,}3$ Дж/(г·К). «Год» на Кроносе состоит из 20 «солнечных суток», причем вокруг своей оси Кронос вращается в том же направлении, что и вокруг Солнца, а ось вращения Кроноса перпендикулярна плоскости его орбиты. (Отметим, что «год» – это период обращения центра масс планеты вокруг Солнца, а «солнечные сутки» – средний интервал между двумя «полуднями», в которые Солнце на небосклоне планеты имеет максимальную высоту над горизонтом). У Кроноса нет спутников, зато есть атмосфера, состоящая из азота, гелия, неона и водяного пара. Кронос – довольно жаркая планета на момент начала наблюдений. Это обеспечивается равномерным радиоактивным «подогревом» всей поверхности планеты – под поверхностью есть сферический слой, заполненный радиоактивным материалом, период полураспада ядер которого $\tau_{1/2} = 5000$ «лет» Кроноса. Итак, наш зонд, опустившийся на поверхность Кроноса, измерил температуру и относительную влажность приповерхностного слоя атмосферы, и, согласно этим измерениям, получились значения $T_0 \approx 330$ К и $\varphi_0 \approx 80$ %. Отметим, что в условиях планеты оказывается, что температура в пределах плотной части атмосферы толщиной $H \approx 10$ км (содержащей 99% всей ее массы) убывает с высотой почти линейно, по закону: $T(h) \approx T_0 \cdot \left(1 - \dfrac{h}{6H}\right)$. Это распределение практически не меняется с течением времени (время релаксации атмосферы к такому состоянию при нарушении – около 1 «года»). При этом «чистота» атмосферы приводит к тому, что практически вся вода находится в атмосфере именно в виде пара (то есть облаков практически не бывает). Необходимые константы:

- Гравитационная постоянная $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м$^3$·с$^{-2}$·кг$^{-1}$.
- Температура фотосферы Солнца $T_1 \approx 6000$ К, радиус Солнца $r_1 \approx 0{,}00465$ а.е., постоянная Стефана–Больцмана $\sigma \approx 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2$·К$^4$).
- Удельную теплоту парообразования для воды можно считать величиной, слабо зависящей от температуры, и при температуре $T_0$ примерно равной $\kappa \approx 2366$ Дж/г. Молярная масса воды $\mu \approx 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К).
- Температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении 101,3 кПа равна 373 К.

Исходя из этих данных, найдите ответы на следующие вопросы (у всех численных результатов должны быть указаны единицы их измерения).

1) Определите продолжительность «года» Кроноса. Ответ дайте в земных годах. (1 балл)

2) Найдите величину угловой скорости вращения планеты вокруг своей оси, (относительно системы отсчета, связанной с «неподвижными звездами»). Вычислите отношение модуля центростремительного ускорения к модулю ускорения свободного падения на экваторе планеты. В ответе укажите два числовых значения – с погрешностью не более 1%. (2 балла)

3) Считая, что Кронос поглощает все падающее на него излучение Солнца, найдите мощность поглощаемого Кроносом теплового излучения Солнца. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. (1 балл)

4) Вычислите отношение этой мощности к мощности потерь на собственное тепловое излучение Кроноса в момент начала наблюдений. Ответ дайте в виде числового значения. (2 балла)

5) Оцените, за какое время температура поверхности Кроноса уменьшилась бы на 4 К, если бы радиоактивный «подогрев» был бы внезапно выключен. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. Получите численный ответ, дайте его в годах Кроноса. (3 балла)

6) С учетом оценок, полученных в предыдущих пунктах, постройте модель остывания поверхности планеты без выключения радиоактивного подогрева (когда изменение температуры поверхности обусловлено естественными причинами). Найдите примерный закон изменения температуры $T$ поверхности планеты с течением времени $t$. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. (3 балла)

7) Оцените, за какое время температура поверхности планеты уменьшится на 4 К (с учетом радиоактивного подогрева). Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. Получите численный ответ, дайте его в годах Кроноса. (2 балла)

Для дальнейшего необходимо изучить свойства водяного пара. Рассмотрите на $pV$-диаграмме участки двух изотерм водяного пара при температурах $T$ и $T + dT$. Пусть эти участки соответствуют медленному переходу пара в жидкость и обратно (как известно, в ходе такого перехода давление пара не изменяется). «Замкнув» эти два участка изотерм вблизи их краев бесконечно малыми участками адиабат, можно вычислить следующие величины: а) КПД получившегося цикла; б) совершаемую за этот цикл работу; в) количество теплоты, которое пар получает в этом цикле от «нагревателя».

8) Из соотношения между указанными выше величинами (а-в), пренебрегая объемом жидкой фазы по сравнению с объемом пара той же массы, выразите наклон кривой зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры в точке с заданными $T$ и $p_н$. В качестве ответа запишите выражение для $\frac{dp_н}{dT}$ как функцию $T$ и $p_н$. (3 балла)

9) В рамках тех же предположений, считая удельную теплоту парообразования для воды величиной, слабо зависящей от температуры, найдите закон изменения давления $p_н$ насыщенного водяного пара при изменении температуры $T$ в окрестности значения температуры $T_0$. В качестве ответа запишите формулу. (4 балла)

10) Используя полученные результаты, определите температуру поверхности планеты $T_1$, при которой начнется конденсация водяных паров на поверхности планеты. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. Получите численный ответ. Потерями воды «наружу» из атмосферы можно пренебречь. (5 баллов)

11) Найдите интервал времени после начала наблюдений, через который начнется конденсация водяных паров на поверхности планеты. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи, и получите численный ответ, дав его в годах Кроноса. (5 баллов)

12) Найдите максимальную возможную глубину океана на поверхности Кроноса (океан образуется из-за конденсации атмосферного водяного пара). Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи, а также через давление $p_н(T_0)$ насыщенных водяных паров при температуре $T_0$ и плотность жидкой воды $\rho_l$. (2 балла)

13) Найдите (при тех же предположениях) связь температуры поверхности с отношением глубины океана к максимально возможной глубине при $T < T_1$, но до завершающей фазы конденсации (т.е. когда глубина океана еще не стала близкой к максимальному значению). Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи. (6 баллов)

14) Определите интервал времени до того момента, когда средняя глубина океана на поверхности Кроноса достигнет четверти от максимально возможной глубины. Запишите формулу, выразив результат через величины, заданные в условии задачи, и получите численный ответ, дав его в годах Кроноса. (4 балла)

15) Нужно ли учитывать теплоту конденсации пара при определении скорости остывания планеты при $T < T_1$ в вычислениях, проводимых с точностью до 5%? А в вычислениях, проводимых с точностью до 0,5%? Ответьте оба раза «да» или «нет». (2 балла)

ВСЕГО за задачу: 45 баллов.