Первая олимпиада мегаполисов

Математика · День 1

Задача 1. Найдите все натуральные n со следующим свойством: существуют n последовательных натуральных чисел, сумма которых является квадратом целого числа.

Задача 2. Даны натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2}\,.$$

Правительство страны Оптимистики ежегодно публикует *Годовой Отчет*, содержащий n экономических индикаторов. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ индикатор под номером i может принимать натуральные значения $1, 2, \ldots, a_i$. Годовой Отчет называется *оптимистичным,* если значения хотя бы $n-1$ индикаторов выросли по сравнению с предыдущим годом. Докажите, что правительство может бесконечно долго публиковать оптимистичные Годовые Отчеты.

Задача 3. Выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность. Известно, что центр этой окружности находится строго внутри многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 взяты соответственно точки B_1, B_2, ..., B_n, отличные от вершин. Докажите, что

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_3} + \frac{B_2B_3}{A_2A_4} + \ldots + \frac{B_nB_1}{A_nA_2} > 1\,.$$