8-րդ դասարան

1. $\frac{7+5^{k+1}\cdot 2^k}{7+2^{k+1}\cdot 5^k} = \frac{7+5\cdot 10^k}{7+2\cdot 10^k} = \frac{\underbrace{500\cdots 07}_{k\ հատ}}{\underbrace{200\cdots 07}_{k\ հատ}}$, որը 3-ով բաժանվող կոտորակ է, քանի որ և՛ համարիչի, և՛ հայտարարի թվանշանների գումարները բաժանվում են 3-ի:

ապացուցված է:

2. $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$ կլինի պարզ թիվ, եթե

$n^2-2n+2=1$, իսկ n^2-2n+2-ը լինի պարզ թիվ $(n^2+2n+2>4)$:

$n^2-2n+2=1 \Leftrightarrow n=1$, իսկ $n=1$ դեպքում $n^2+2n+2=n^4+4=5$-ը պարզ թիվ է: պատ. 1:

3. $132=3\cdot 4\cdot 11 \Rightarrow \overline{xy9z}$ թիվը պետք է բաժանվի 3-ի, 4-ի և 11-ի: $\overline{xy9z} \vdots 4 \Rightarrow z=2$ կամ $z=6$:

ա) $z=2$ դեպքում $\overline{xy9z}=\overline{xy92}$: $\overline{xy92} \vdots 3 \Rightarrow x+y+11 \vdots 3$ և $\overline{xy92} \vdots 11 \Rightarrow (x+9)-(y+2)=$

$=(x-y+7) \vdots 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-y+7=0 \\ x-y+7=11 \end{array}\right.$, քանի որ $x-y+7 \le 9+7=16$:

Երբ $x-y+7=11 \Rightarrow y=x-4 \ge 0 \Rightarrow x+y+11=(2x+7) \vdots 3 \Rightarrow x \in \{4,7\}$: Երբ $x=4 \Rightarrow y=0$ կամ $x=7 \Rightarrow y=3$:

Երբ $(x-y+7)=0 \Rightarrow x=y-7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y>7 \\ 2y+4 \vdots 3, \end{array}\right.$ ինչը հնարավոր չէ: Այսպիսով՝ այս դեպքում ստացանք 4092 և 7392:

բ) $z=6$ դեպքում՝ $\overline{xy9z}=\overline{xy96} \vdots$ 3-ի և 11-ի, հետևաբար

$\overline{xy96} \vdots 33$-ի: $\overline{xy96}=100\cdot\overline{xy}+99-3=99\cdot\overline{xy}+99+\overline{xy}-3$, որը կբաժանվի 33-ի, եթե

$$(\overline{xy}-3) \vdots 33 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{xy}=36 \\ \overline{xy}=69 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{xy96}=6996 \\ \overline{xy96}=3696 \end{array}\right.$$

<u>Դիտողություն՝</u> ա) և բ) դեպքերի լուծումները կարելի է տալ նույն եղանակով:

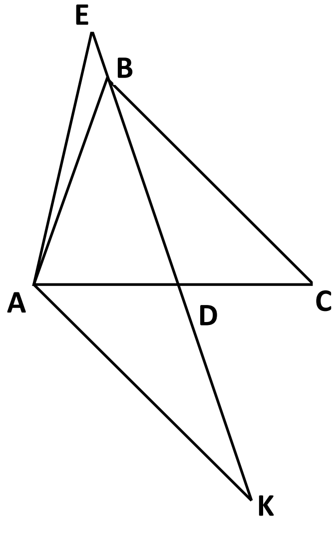
Պատ.՝ 3696, 4092, 6996, 7392:

4. Եթե ընտրված թվերի մեջ կա $25=5^2$, ապա խնդրի պահանջը կատարված է: Եթե 25-ը ընտրված թվերի մեջ չկա, ապա մնացած թվերը տրոհենք 12 զույգերի.

(1; 24), (2; 23), (3; 22), …, (11; 14), (12; 13): Եթե այս զույգերից որևէ երկուսը լինի ընտրված թվերի մեջ, ապա խնդրի պահանջը կատարված կլինի: Եթե ոչ, կնշանակի, որ ամեն զույգերից ընտրված է մեկական թիվ: Մասնավորապես ընտրված (9; 16) զույգի թվերից մեկը, իսկ դրանցից յուրաքանչյուր լրիվ քառակուսի է:

ապացուցված է:

5.



BD միջնագիծը շարունակենք իր չափով:

Այդ դեպքում

$\Delta BDC=\Delta ADK \Rightarrow \measuredangle AKD=\measuredangle CBD$ և $BC=AK \Rightarrow$

$\measuredangle AED=\measuredangle AKE \Rightarrow \ AE=AK \ \Rightarrow AE=BC$:

<u>Դիտողություն.</u> E կետը BD հատվածին պատկանելու դեպքում լուծումը չի փոխվում:

ապացուցված է:

9-րդ դասարան

1. $\frac{1+5^{n+1}\cdot 2^n}{1+2^{n+1}\cdot 5^n} = \frac{1+5\cdot 10^n}{1+2\cdot 10^n} = \frac{\underbrace{500\cdots 01}_{n\ հատ}}{\underbrace{200\cdots 07}_{n\ հատ}}$, որը 3-ով բաժանվող կոտորակ է, քանի որ և՛ համարիչի, և՛ հայտարարի թվանշանների գումարները բաժանվում են 3-ի:

ապացուցված է:

2. Նշանակենք $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = t$: Պետք է ապացուցել, որ $\sqrt{t^3+1} \geq t+1 \Leftrightarrow t^3 \geq t^2 + 2t$:

Նկատենք, որ $t = \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \sqrt[3]{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}} \geq 2\sqrt[6]{abc} = 2$, այսինքն՝ $t \geq 2$, որտեղից՝ $t^3 \geq 2t^2 = t^2 + t^2 \geq t^2 + 2t$:

Պատ.՝ ապացուցված է:

3. Եթե ընտրված թվերի մեջ կա $25 = 5^2$, ապա խնդրի պահանջը կատարված է: Եթե 25-ը ընտրված թվերի մեջ չկա, ապա մնացած թվերը տրոհենք 12 զույգերի.

(1; 24), (2; 23), (3; 22), …, (11; 14), (12; 13): Եթե այս զույգերից որևէ երկուսը լինի ընտրված թվերի մեջ, ապա խնդրի պահանջը կատարված կլինի: Եթե ոչ, կնշանակի, որ ամեն զույգերից ընտրված է մեկական թիվ: Մասնավորապես ընտրված (9; 16) զույգի թվերից մեկը, իսկ դրանցից յուրաքանչյուր լրիվ քառակուսի է:

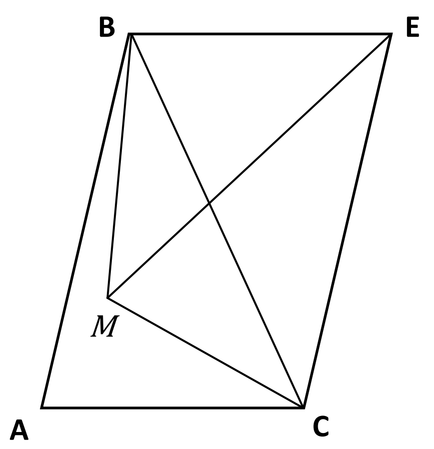
ապացուցված է:

4. $\left.\begin{matrix} 2a+5b=m^2 \\ 5a+2b=n^2 \end{matrix}\right| \Rightarrow m^2+n^2 = 7(a+b) \vdots 7$, որտեղից (օգտվելով, որ $p^2 \equiv 0;1;2;4(mod7)$) դժվար չէ ստուգել, որ $\begin{cases} m \vdots 7 \\ n \vdots 7 \end{cases}$, ուրեմն $(a+b) \vdots 7$:

$(5a+2b)-(2a+5b) = 3(a-b) \vdots 7 \Rightarrow (a-b) \vdots 7 \Rightarrow 2a = \big((a+b)+(a-b)\big) \vdots 7 \Rightarrow a \vdots 7$:

ապացուցված է:

5.



$\measuredangle BAC = \measuredangle BCA = 70^0$

Դիցուք $BE||AC$ և $BE = AC \Rightarrow ABEC -$ ն

զուգահեռագիծ է, հետևաբար $\Delta ABC = \Delta BCE \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle CBE = \measuredangle CEB = 70^0$ և $\measuredangle BCE = 40^0$: Ուրեմն $\measuredangle MBE = 100^0$:

$BM = BE \Rightarrow \measuredangle BME = \measuredangle BEM = \frac{180^0-100^0}{2} = 40^0$:

Այսպիսով՝ $\measuredangle BME = \measuredangle BCE$, ուրեմն $MBEC$

քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ,

հետևաբար $\measuredangle MCB = \measuredangle MEB = 40^0$:

Պատ՝ 40^0:

10-րդ դասարան

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}=\frac{1}{501}+\cdots+\frac{1}{1000}$

Հավասարության երկու մասերին գումարենք՝

$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1000}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{500}\right)$, կստանանք՝

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1000}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{500}+\frac{1}{501}+\frac{1}{502}+\cdots+\frac{1}{1000},$$

կամ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1000}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1000}:$$

ապացուցված է:

2. $\exists k=[x]\in Z$, այնպես, որ

$$k\le x<k+1$$

Քննարկենք երկու դեպք.

I. $k\le x<k+0.5$ և II. $k+0.5\le x<k+1$

I. $k\le x<k+0.5\Rightarrow\begin{cases}0\le x-k<0.5\\0.5\le x-k+0.5<1\end{cases}$, հետևաբար $\{x\}=\{x-k\}=x-k$

և $\{x+0.5\}=\{x-k+0.5\}=x-k+0.5$, ուստի $\{x+0.5\}-\{x\}=x-k+0.5-(x-k)=0.5$

II. $k+0.5\le x<k+1\Rightarrow\begin{cases}0.5\le x-k<1\\0\le x-k-0.5<0.5\end{cases}$, հետևաբար

$$\{x+0.5\}=\{x+0.5-1\}=\{x-0.5-k\}=x-k-0.5$$

$\{x\}=\{x-k\}=x-k$, ուրեմն $\{x+0.5\}-\{x\}=x-k-0.5-(x-k)=-0.5$

Այսպիսով՝ $\{x+0.5\}-\{x\}$ արտահայտությունը x –ի ցանկացած արժեքի դեպքում ունի երկու արժեք՝ -0.5 և 0.5 :

Պատ.՝ $\{-0.5;0.5\}$:

3. Դիցուք $\frac{1}{7k_1-1}+\frac{1}{7k_2-1}+\cdots+\frac{1}{7k_{2013}-1}=1$, $k_i\in N(i=1,2,\dots,2013)$:

Ազատվելով հայտարարներից՝ կստանանք

$$(7k_2-1)(7k_3-1)\cdots(7k_{2013}-1)+(7k_1-1)(7k_3-1)\cdots(7k_{2013}-1)+\cdots$$
$$+(7k_1-1)(7k_2-1)\cdots(7k_{2012}-1)=(7k_1-1)(7k_2-1)\cdots(7k_{2013}-1)$$

Ձախ մասի յուրաքանչյուր գումարելի 7-ի բաժանվելիս տալիս է 1 մնացորդ, ուստի ձախ մասը 7-ի բաժանվելիս կստացվի 4 մնացորդ $(2013=7\cdot287+4)$:

Աջ մասը փակագծերը բացելուց հետո կընդունի $7p-1$, $(p\in N)$ տեսքը, ինչը նշանակում է, որ այն 7-ի բաժանելիս կստացվի 6 մնացորդ:

Այսպիսով՝ խնդրի պահանջին բավարարող թվեր գոյություն չունեն:

4. $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}$: Նույն կերպ, կստանանք

$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\gamma}$ և $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta}$:

Անհավասարությունը բերվեց հետևյալ հայտնի անհավասարությանը

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$, որտեղ $a=sin\alpha>0,\ b=sin\beta>0,\ \ c=sin\gamma>0$

որը ունի մի քանի ապացուցման եղանակներ:

Բերենք ապացուցման երեք եղանակ:

I եղանակ:

a+b = x, b+c = y, a+b=z նշանակումներից հետո անհավասարությունը բերվում է հետևյալ տեսքի

$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$,
որտեղից

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq 6,$$

որը ակնհայտ է, քանի որ ըստ Կոշու անհավասարության, ձախ մասի յուրաքանչյուր գումարելի երկուից փոքր չէ::

II եղանակ:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ $a+b+c\ =1$ և $0<x<1$:
Նկատենք, որ

$$\frac{x}{1-x}\geq\frac{9x-1}{4}$$

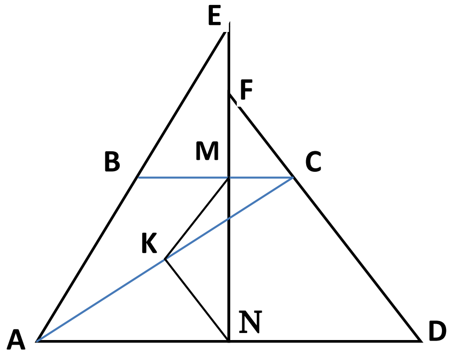
Հետևաբար

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\geq\frac{9a-1}{4}+\frac{9b-1}{4}+\frac{9c-1}{4}=\frac{9(a+b+c)-3}{4}=\frac{3}{2}$$

III եղանակ

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}:$$

5.



Դիցուք BC –ի , AD-ի և AC-ի միջնակետերն են համապատասխանաբար M, N, և K կետերը: $MK||AB$ և $MK=\frac{AB}{2}$, $KN||CD$ և $KN=\frac{CD}{2}$, ուրեմն $MK=KN\Rightarrow\measuredangle KNM=\measuredangle KMN$, հետևաբար $\measuredangle AEN=\measuredangle KMN=\measuredangle KNM=\measuredangle NFD$: Այսպիսով $\measuredangle AEN=\measuredangle NFD$, ուստի $AE=FD$ (տե՛ս 8-րդ դասարանի 5-րդ խնդիրը):

11-րդ դասարան

1. Ըստ Կոշու անհավասարության՝ $a+ab+b\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2}$, $b+bc+c\geq 3\sqrt[3]{b^2c^2}$,
$c+ca+a\geq 3\sqrt[3]{a^2c^2}$: Գումարելով կունենանք՝

$$3\left(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)\leq 2(a+b+c)+(ab+bc+ca)\leq 2\cdot 3+3=9,$$

որտեղից $3\left(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)\leq 3$: Այստեղ օգտվեցինք

$3(ab+bc+ca)\leq (a+b+c)^2=9$ անհավասարությունից:

ապացուցված է:

2. Պարզ է, որ $a>0$ և $b^2-4ac\leq 0\Rightarrow c\geq \dfrac{b^2}{4a}\Rightarrow \dfrac{a+b+c}{b-a}\geq \dfrac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}+1}{\frac{b}{a}-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2+4t+4}{t-1}$$, որտեղ $t\equiv\dfrac{b}{a}$:

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2+4t+4}{t-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2-1+4(t-1)+9}{t-1}=\frac{1}{4}\left(t+1+\frac{9}{t-1}+4\right)=\frac{1}{4}\left((t-1)+\frac{9}{t-1}+6\right)\geq$$
$$\geq\frac{1}{4}\left(2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{9}{t-1}}+6\right)=3$$

ընդ որում հավասարության նշանը տեղի ունի $t-1=\dfrac{9}{t-1}$ կամ $t=\dfrac{b}{a}=4$ դեպքում: Այսպիսով՝ $\dfrac{a+b+c}{a-b}$-ի հնարավոր փոքր արժեքը 3-ն է:

Պատ.՝ 3:

3. Դիցուք $(k-1)^3+k^3+(k+1)^3=p^3,(k>1;k\in N)\Leftrightarrow 3k(k^2+2)=p^3\Leftrightarrow p=3n\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k(k^2+2)=9n^3$: Նկատենք, որ $(k;k^2+2)=1$ կամ $(k;k^2+2)=2$,

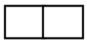
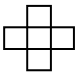
I. $(k;k^2+2)=1\Leftrightarrow\begin{cases}k=9m^3\\k^2+2=l^3\end{cases}$ կամ $\begin{cases}k=l^3\\k^2+2=9m^3\end{cases}$

$k=9m^3\Leftrightarrow k^2+2=81m^6+2=l^3$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ $l^3\equiv 0;\pm1(\bmod 9)$:

Երբ $k=l^3\Rightarrow k^2+2=l^6+2=9m^3$, որը նույնպես հնարավոր չէ, քանի որ $l^6\equiv 0;1(\bmod 9)$:

II. $(k;k^2+2)=2\Rightarrow k^3\,\vdots\,8$:

ապացուցված է:

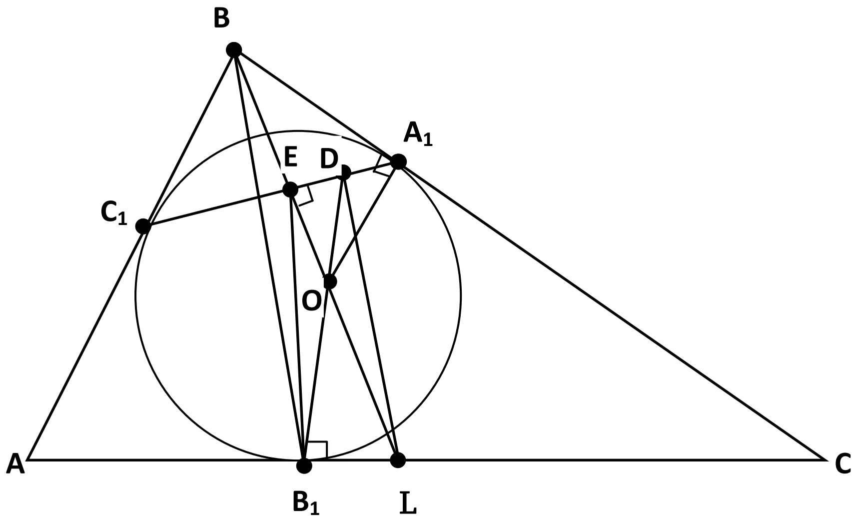
Տախտակը ներկենք շախմատային: Պարզ է, որ  պատկերը ծածկում է 1 սև և 1 սպիտակ վանդակ, իսկ  պատկերը կամ 1 սպիտակ 4 սև, կամ 1 սև և 4 սպիտակ վանդակ:

Դրանց քանակները նշանակենք համապատասխանաբար x, y և z-ով: Այս դեպքում սև վանդակների քանակը կլինի x+y+4z , իսկ սպիտակ վանդակների քանակը` x+4y+z: Այստեղից

$(x+y+4z)-(x+4y+z)=3(z-y) \vdots 3$:

Ստացվեց, որ սև և սպիտակ վանդակների տարբերությունը բաժանվում է 3-ի, որը հնարավոր չէ:

5.



Քանի որ $BC_1 = BA_1$ և $\angle C_1BO = \angle A_1BO$, հետևաբար $BO \perp A_1C_1$: B_1O ուղղի և A_1C_1-ի հատման կետը նշանակենք D –ով:

ΔBA_1O -ից` $OA_1^2 = OE \cdot OB$, իսկ $OA_1 = OB_1$, ուրեմն, $OB_1^2 = OE \cdot OB \Rightarrow \dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{OE}{OB_1} \Rightarrow \Delta OEB_1$ նման է ΔOBB_1 -ին , քանի որ $\angle BOB_1$ –ը ընդհանուր է այդ եռանկյունների մեջ:

Քանի որ ΔOEB_1 նման է ΔOBB_1 -ին $\Rightarrow \angle OB_1E = \angle OBB_1$:

Նկատենք, որ DL տրամագծով շրջանագիծը անցնում է E և B_1 կետերով, քանի որ

$\angle LED = \angle DB_1L = 90^0$: Հետևաբար $\angle EB_1O = \angle OLD$:

Այսպիսով` $\angle B_1BO = \angle OLD \Rightarrow LD \parallel BB_1$: Մյուս կողմից L կետից BB_1–ին տարված զուգահեռ ուղիղը միակն է, ուրեմն D և K կետերը համընկնում են, որտեղից հետևում է պնդման ճիշտ լինելը:

ապացուցված է:

12-րդ դասարան

1. Պայմանից հետևում է, որ $\forall\, x - ի\ դեպքում$

$$\begin{cases} f(a-x)+f(a+x)=2b \\ f(c-x)=f(c+x) \end{cases} \quad կամ \quad \begin{cases} f(x)=2b-f(2a-x) \\ f(x)=f(2c-x) \end{cases}, \text{ հետևաբար}$$

f(x)=$f(2c-x)=2b-f(2a-x)=2b-f(2c-2a+x)=2b-\big(2b-f(2a-2c+2a-x)\big)=$

$$=f(4a-2c-x)=f(2c-(4a-2c-x))=f(x+4c-4a)$$

Այսպիսով՝ $f(x)=f(x+4c-4a)$ $\quad \forall\, x - ի\ դեպքում$, *որը նշանակում է, որ*
$T=4(a-c)\neq 0$ *թիվը* f *ֆունկցիայի պարբերություն է, ուրեմն* $f -$ *ը պարբերական ֆունկցիա է:*

2. $$\frac{a^{2013}}{a+b}+\frac{a+b}{4}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{2011}\geq 2013\cdot\sqrt[2013]{\frac{a^{2013}}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4}\cdot\frac{1}{2^{2011}}}=\frac{2013a}{2}$$, որտեղից

$\frac{a^{2013}}{a+b}\geq\frac{2013a}{2}-\frac{a+b}{4}-\frac{2011}{2}$: Նման ձևով $\frac{b^{2013}}{b+c}\geq\frac{2013b}{2}-\frac{b+c}{4}-\frac{2011}{2}$,

$\frac{c^{2013}}{c+a}\geq\frac{2013c}{2}-\frac{c+a}{4}-\frac{2011}{2}$: Գումարելով այս երեք անհավասարությունների համապատասխան մասերը կստանանք՝

$$\frac{a^{2013}}{a+b}+\frac{b^{2013}}{b+c}+\frac{c^{2013}}{c+a}\geq\frac{2012(a+b+c)}{2}-\frac{3\cdot 2011}{2}\geq\frac{2012\cdot 3\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3\cdot 2011}{2}=\frac{3}{2}:$$

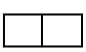
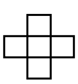
3. Դիցուք $(k-1)^3+k^3+(k+1)^3=p^3, (k>1; k\in N)\Leftrightarrow 3k(k^2+2)=p^3\Leftrightarrow p=3n\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k(k^2+2)=9n^3$: Նկատենք, որ $(k;k^2+2)=1$ կամ $(k;k^2+2)=2$,

I. $(k;k^2+2)=1\Leftrightarrow\begin{cases}k=9m^3\\ k^2+2=l^3\end{cases}$ կամ $\begin{cases}k=l^3\\ k^2+2=9m^3\end{cases}$

$k=9m^3\Leftrightarrow k^2+2=81m^6+2=l^3$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ $l^3\equiv 0;\pm 1(\mathrm{mod}\,9)$:

Երբ $k=l^3\Rightarrow k^2+2=l^6+2=9m^3$, որը նույնպես հնարավոր չէ, քանի որ $l^6\equiv 0;1(\mathrm{mod}\,9)$:

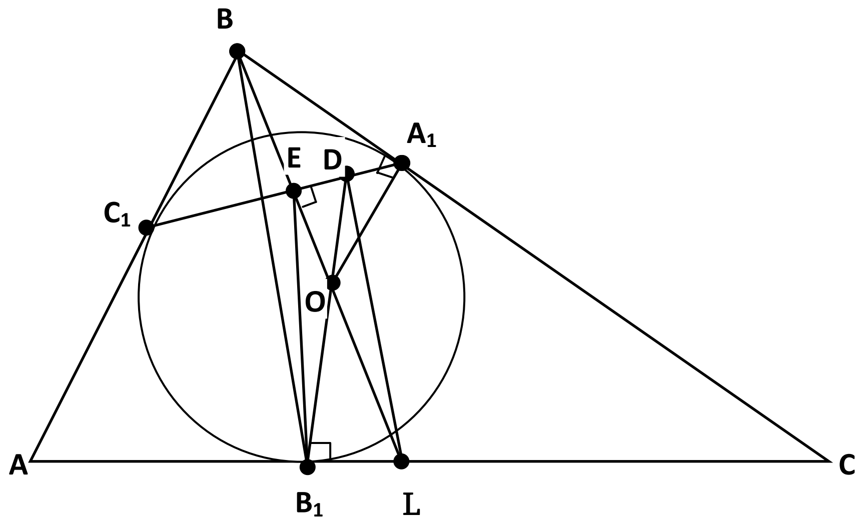
II. $(k;k^2+2)=2\Rightarrow k^3\,\vdots\,8$:

4. Տախտակը ներկենք շախմատային: Պարզ է, որ  պատկերը ծածկում է 1 սև և 1 սպիտակ վանդակ, իսկ  պատկերը կամ 1 սպիտակ 4 սև, կամ 1 սև և 4 սպիտակ վանդակ: Դրանց քանակները նշանակենք համապատասխանաբար x, y և z-ով: Այս դեպքում սև վանդակների քանակը կլինի x+y+4z , իսկ սպիտակ վանդակների քանակը՝ x+4y+z: Այստեղից

(x+y+4z)-(x+4y+z)=3(z-y) $\vdots$ 3 :

Ստացվեց, որ սև և սպիտակ վանդակների տարբերությունը բաժանվում է 3-ի, որը հնարավոր չէ:

5.



Քանի որ $BC_1 = BA_1$ և $\angle C_1BO = \angle A_1BO$, հետևաբար $BO \perp A_1C_1$: B_1O ուղղի և A_1C_1-ի հատման կետը նշանակենք D–ով:

ΔBA_1O-ից՝ $OA_1^2 = OE \cdot OB$, իսկ $OA_1 = OB_1$, ուրեմն, $OB_1^2 = OE \cdot OB \Rightarrow \dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{OE}{OB_1} \Rightarrow \Delta OEB_1$ նման է ΔOBB_1-ին, քանի որ $\angle BOB_1$–ը ընդհանուր է այդ եռանկյունների մեջ:

Քանի որ ΔOEB_1 նման է ΔOBB_1-ին $\Rightarrow \angle OB_1E = \angle OBB_1$:

Նկատենք, որ DL տրամագծով շրջանագիծը անցնում է E և B_1 կետերով, քանի որ

$\angle LED = \angle DB_1L = 90^0$: Հետևաբար $\angle EB_1O = \angle OLD$:

Այսպիսով՝ $\angle B_1BO = \angle OLD \Rightarrow LD \parallel BB_1$: Մյուս կողմից L կետից BB_1–ին տարված զուգահեռ ուղիղը միակն է, ուրեմն D և K կետերը համընկնում են, որտեղից հետևում է պնդման ճիշտ լինելը:

ապացուցված է: