11-րդ դասարան

1. $ABCD$ քառանկյունն այսպիսին է, որ $\angle A = \angle C$ կամ $\angle A + \angle C = 180^0$ (տե՛ս նաև 10-րդ դասարանի N1 խնդրի ցուցումը):

2. Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ. դիցուք, գոյություն ունի այնպիսի $n \in N$ թիվ, որ $\sqrt{\dfrac{7n-3}{5n+2}} = \dfrac{p}{q}$ որտեղ $p,\, q \in N,\ \ (p;\ q) = 1$

Այս հավասարությունից կունենանք՝

$$n = \frac{3q^2 + 2p^2}{7q^2 - 5p^2}:$$

Ունենք՝ $7n = 3 + \dfrac{29p^2}{7q^2 - 5p^2}$:

Բավական է ցույց տալ, որ $\dfrac{29p^2}{7q^2 - 5p^2}$ արտահայտությունը չի կարող լինել ամբողջ թիվ:

Դրա համար բավական է համոզվել, որ՝

$$\left(p^2,\ 7q^2 - 5p^2\right) = 1 \ \text{ և } \ 7q^2 - 5p^2 = 1 \ \text{ ու } \ 7q^2 - 5p^2 = 29$$

հավասարությունները չեն կարող տեղի ունենալ; Այդ պնդումների հիմնավորումները դժվարություն չեն ներկայացնում:

3. Կիրառել հակասող ենթադրության մեթոդ. դիցուք, գոյություն ունեն այնպիսի դրական a, b, c թվեր, որոնց դեպքում

$$\left(a - 9a\right)b^2 \ge \frac{1}{27},\ \left(2 - 9b\right)c^2 \ge \frac{1}{27},\ \left(2 - 9c\right)a^2 \ge \frac{1}{27}:$$

Այդ պայմանով ճիշտ կլինի նաև

$$(2-9a)(2-9b)(2-9c)a^2b^2c^2 \ge \left(\frac{1}{27}\right)^3 \tag{1}$$

անհավասարությունը:

Մյուս կողմից՝

$$(2-9a)a^2 = \frac{1}{8}(2-9a)\cdot 8a \cdot a < \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{(2-9a)+8a+a}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}:$$

Նույն ձևով՝

$$(2-9b)b^2 < \frac{1}{27}, \qquad (2-9c)c^2 < \frac{1}{27}:$$

Վերջին երեք անհավասարություններից հետևում է, որ

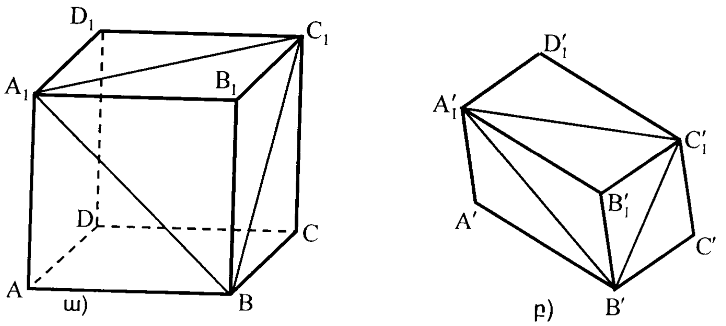
$$\left(2-9a\right)\left(2-9b\right)\left(2-9c\right)a^2b^2c^2 < \left(\frac{1}{27}\right)^3 : \qquad (2)$$

(1) և (2) անհավասարություններից ստանում ենք հակասություն: Հետևաբար, խնդրի պնդումը ճիշտ է:

4. Ուղղանկյունանիստի օրթոգոնալ պրոյեկցիան կարող է լինել ուղղանկյուն կամ վեցանկյուն: Ուղղանկյուն կստացվի այն և միայն այն դեպքում, երբ պրոյեկցիայի հարթությունը զուգահեռ է որևէ նիստի հարթությանը կամ հանդիպակաց նիստերի զուգահեռ անկյունագծերով որոշվող հարթությանը: Այդպիսի դեպքերում պրոյեկցիաների մակերեսները կլինեն հետևյալ մեծությունները`

$$ab, \quad bc, \quad ca, \quad a\sqrt{b^2+c^2}, \quad b\sqrt{c^2+a^2}, \quad c\sqrt{a^2+b^2} : \qquad (1)$$

Մնացած դեպքերում պրոյեկցիան կլինի վեցանկյուն` $A'B'C'C_1'D_1'A_1$ (նկ.129,բ):



Նկ. 129

Դիտարկենք B_1 գագաթից ելնող B_1B, B_1A_1, B_1C_1 կողերի ծայրակետերը միացնող BA_1C_1 եռանկյան $B'A_1'C_1'$ պրոյեկցիան: Նկատենք, որ ուղղանկյունանիստի պրոյեկցիայի մակերեսը երկու անգամ մեծ է այդ եռանկյան մակերեսից: Դա հետևում է այն բանից, որ զուգահեռագիծն անկյունագծով բաժանվում է երկու հավասար եռանկյունների: Նշանակում է` պրոյեկցիայի մակերեսը կլինի մեծագույնը, եթե մեծագույն արժեք է ընդունում $B'A_1'C_1'$ եռանկյան մակերեսը: Իսկ դա տեղի կունենա այն դեպքում, երբ պրոյեկցիայի հարթությունը զուգահեռ է $BA_1C_1$ եռանկյան հարթությանը: Այդ դեպքում`

$$S_{\text{պր}} = 2\cdot S_{B'A_1'C_1'} = 2\cdot S_{BA_1C_1} :$$

Եթե $B_1B=a, \quad B_1A_1=b, \quad B_1C_1=c$, ապա

$$BA_1=\sqrt{a^2+b^2}, \quad BC_1=\sqrt{b^2+c^2}, \quad A_1C_1=\sqrt{a^2+c^2} :$$

Առանց դժվարության, կարելի է ցույց տալ, որ

$$S_{BA_1C_1} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\ :$$

Հետևաբար՝

$$S_{\text{պր}} = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\ :$$

Այնուհետև հեշտությամբ համոզվում ենք, որ ստացված թիվը մեծ է (1) տողում գրված ցանկացած թվից:

Պատ.՝ $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$:

5. Նշանակենք՝ $\sqrt{x} = u,\ \ \sqrt{y} = v,\ \ \sqrt{z} = t\ \ (u,\ v,\ t \geq 0)$: Համակարգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} u^6 + v^6 + t^6 = 1, & (1) \\ (1+u)(1+v)(1+t) = 2\ : & (2) \end{cases}$$

Վերոհիշյալ նշանակումներից և (1) հավասարությունից հետևում է, որ

$$0 \leq u \leq 1,\ \ 0 \leq v \leq 1,\ \ 0 \leq t \leq 1:$$

(2) հավասարությունը ներկայացնենք այսպես՝

$$u + v + t + uv + vt + ut + uvt = 1: \qquad (3)$$

Նկատենք, որ $u + v + t \geq u^6 + v^6 + t^6 = 1,\quad uv + vt + ut + uvt \geq 0$:

Հետևաբար, (3) հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$u = u^6,\ v = v^6,\ t = t^6,\quad uv + vt + ut = 0,\quad uvt = 0:$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$u = 1,\ \ v = t = 0 \text{ կամ } u = v = 0,\ \ t = 1 \text{ կամ } u = t = 0,\ \ v = 1:$$

Վերադառնալով նշանակմանը կունենանք երեք լուծում՝

$$x = 1,\quad y = z = 0,$$
$$x = y = 0,\ \ z = 1,$$
$$x = z = 0,\ \ y = 1:$$

Կ. Գ. Առաքելյան