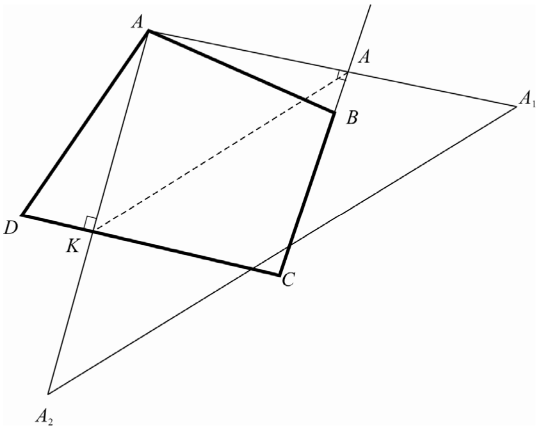
10-րդ դասարան

1. Դիցուք E-ն և K-ն AA_1 և AA_2 հատվածների հատման կետերն են, համապատասխանաբար, CB և CD ուղիղների հետ: Ակնհայտ է, որ $AA_1 = 2 \cdot KE$: $AEKC$ քառանկյունը ներգծելի է և AC-ն նրան արտագծած շրջանագծի տրամագիծն է: Հետևաբար,



$KE = AC \cdot \sin \hat{C}$: Նշանակում է՝ $AA_1 = 2 \cdot AC \cdot \sin \hat{C}$:

Նույն դատողություններով կունենանք՝ $CC_1 = 2 \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$: Քանի որ $\sin \hat{A} = \sin \hat{C}$, ուստի $CC_1 = AA_1$:

2. Գումարելով համակարգի հավասարությունները, կունենանք՝

$$x^2 + y^2 + xy + yz + zx + 6 = 4(x + y + z):$$

Որոշ ձևափոխություններից հետո կունենանք՝

$$(x + y - 2)^2 + (x + z - 2)^2 + (z + x - 2)^2 = 0:$$

Այնուհետև կունենանք

$$x + y = y + z = z + x = 2,$$

$$x = y = z = 1:$$

Ստուգումով պարզում ենք, որ $(1;1;1)$ եռյակը բավարարում է տրված համակարգի յուրաքանչյուր հավասարությանը:

Պատ.՝ $(1;1;1)$**:**

3. Օգտվելով $uv \le \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$ անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝

$$\left(5x-3y+7z\right)\left(x+9y-z\right) \le 9\left(x+y+z\right)^2 :$$

Մյուս կողմից, հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ

$$\left(x+y+z\right)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right):$$

Հետևաբար,

$$\left(5x-3y+7z\right)\left(x+9y-z\right) \le 9\cdot 3\left(x^2+y^2+z^2\right) = 90 :$$

$\max\left(5x-3y+7z\right)\left(x+9y-z\right) = 90$ (երբ $x = y = z = \frac{\sqrt{10}}{3}$ կամ $x = y = z = -\frac{\sqrt{10}}{3}$):

Պատ.՝ 90**:**

4. Խնդիրը լուծելիս հիմքում կարելի է ունենալ հետևյալ հայտնի փաստը՝

Եթե $n \in N$ թիվը ներկայացվել է կանոնական տեսքով՝

$$n = P_1^{k_1} \cdot P_2^{k_2} ... P_m^{k_m} ,$$

ապա նրա բաժանարարների քանակը հավասար է՝ $\left(1+k_1\right)\left(1+k_2\right)\ldots\left(1+k_m\right)$:

Ամենից առաջ նկատենք, որ, օրինակ՝

$2^9 = 512$ թիվն ունի ճիշտ 10 բաժանարար $\left(1,2,2^2,\ldots 2^9\right)$;

$2^6 \cdot 3^2 = 576$ թիվն ունի ճիշտ 21 բաժանարար $\left(\left(1+6\right)\left(1+2\right) = 21\right)$;

$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ թիվն ունի ճիշտ 30 բաժանարար $\left(\left(1+4\right)\left(1+2\right)\left(1+1\right) = 30\right)$:

Ցույց տանք, որ գոյություն չունի այնպիսի եռանիշ թիվ, որն ունենա ճիշտ 11 բաժանարար: Ճիշտ 11 բաժանարար ունեն միայն P^{10} տեսքի թվերը, որտեղ P-ն պարզ թիվ է:

Մյուս կողմից, $P^{10} \ge 2^{10} = 1024$: Նշանակում է՝ եռանիշ թվերի մեջ այդպիսի թիվ չկա:

Նկատենք, որ եռանիշ թվերն իրենց կանոնական վերլուծության մեջ չեն կարող ունենալ 4-ից ավելի պարզ արտադրիչ, քանի որ $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 > 1000$: Հետևաբար, ամենամեծ թվով բաժանարարներ ունեցող եռանիշ թվերը պետք է փնտրել

$$2^k \cdot 3^m \cdot 5^q \cdot 7^l$$

տեսքի թվերի մեջ, որտեղ $k \ge m \ge q \ge l$:

Դժվար չէ նկատել, որ եթե $l, q, m \in N,$ ապա $l = q = m = 1$: Հակառակ դեպքում կունենանք՝

$$2^k \cdot 3^m \cdot 5^q \cdot 7^l \ge 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 > 1000 :$$

Այսպիսով, եթե $l, q, m \in N,$ ապա եռանիշ թիվը կունենա $2^k \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ տեսքը, որտեղ $k \le 3$:

$k = 3$ դեպքում կունենանք՝

$$2^3\cdot3\cdot5\cdot7=840,$$

որի բաժանարարների քանակը կլինի՝

$$(1+3)(1+1)(1+1)(1+1)=32:$$

Մնում է դիտարկել $l=0; q=l=0,\ m=q=l=0$ դեպքը, այսինքն՝ դիտարկել

$$2^k\cdot3^m\cdot5^q\ (q\le2,\ m\le3;\ k\le7),$$
$$2^k\cdot3^m\ (m\le3),$$
$$2^k\ (k\le9),$$

տեսքի թվերը: Առանց դժվարության կարելի է համոզվել. որ դրանցից յուրաքանչյուրի բաժանարարների թիվը փոքր է 32-ից:

Պատ.՝ ա) այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո: Ամենամեծ թվով բաժանարարներ ունի 840-ը:

5. Նշանակենք՝ $BC=a,\ AC=b,\ AB=c$:

Սկզբում ապացուցվում է, որ

$$a(a+c)=b^2\ : \qquad (1)$$

Տե՛ս, 9-րդ դասարանի N3 խնդիրը:

Այդ հավասարությունը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել նաև սինուսների և կոսինուսների թեորեմների կիրառմամբ:

ա) Նկատենք, որ

$$a=41^2=1681,\ b=41\cdot49=2009,\ c=2^4\cdot3^2\cdot5=720:$$

թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին:

բ) Ցույց տանք, որ այդպիսի եռանկյան ոչ մի կողմի չի կարող ունենալ 2010 երկարություն:

Եթե a-ն հավասար լիներ 2010-ի, կունենայինք՝

$$2010(2010+c)=b^2, \qquad (2)$$

որտեղից կհետևեր, որ $b^2\,\vdots\,2010$: Քանի որ $2010=2\cdot3\cdot5\cdot7,$ ուստի $b\,\vdots\,2010,$ նշանակում է՝

$$b^2\,\vdots\,2010^2:$$

(2) հավասարությունից կունենայինք՝

$$(2010+c)\,\vdots\,2010\Rightarrow c\,\vdots\,2010:$$

Ստացվեց հակասություն ($(a;b;c)=1$ պայմանի):

Նշանակում է՝ a-ն չի կարող հավասարվել 2010-ի:

Դիցուք, $c=2010$: (1) հավասարությունը ներկայացնենք այսպես՝

$$2010a=(b-a)(b+a) \qquad (3)$$

Ակնհայտ է, որ եթե b-ն և a-ն միաժամանակ լինեն զույգ, ապա կխախտվի $(a, b, c)=1$ պայմանը:

Մյուս կողմից, (3) հավասարությունից հետևում է, որ $(b-a)(b+a)$-ն զույգ թիվ է: Նշանակում է` a-ն և b-ն կարող են միայն կենտ լինել: Սակայն այդ դեպքում $(b-a)(b+a)\vdots 4,$ իսկ $2010a$ չի բաժանվում 4-ի:

Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ c-ն չի կարող հավասարվել 2010-ի:

Դիցուք, $b=2010$: (1) հավասարությունը ներկայացնենք

$$a(a+c)=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 67^2$$

տեսքով: Ակնհայտ է, որ այս դեպքում $(a;\, c)=1$:

Մյուս կողմից, քանի որ $a<b,$ ուստի a-ն չի կարող պարունակել 67 արտադրիչը, հակառակ դեպքում $a\vdots 67^2=4489$, այսինքն` $a\geq 4489$: Հետևաբար, $\max a=2^2\cdot 3^2\cdot 5^5=900$: Նշանակում է`

$$\min(a+c)=67^2=4489\Rightarrow \min c=3589:$$

Սակայն $\max(b+a)=2910$:

Ստացվում է, որ $b+a<c,$ որը հակասություն է:

Այսպիսով, եռանկյան ոչ մի կողմ չի կարող հավասարվել 2010-ի:

Պատ.` ա) այո, բ) ոչ: