Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /19, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի առաջին օր

8-րդ դասարան

1.Հնարավո՞ր է արդյոք $1^3+2^3+3^3+\ldots+2011^3$ գումարը ներկայացնել 2010 հատ բնական թվերի խորանարդների գումարի տեսքով:

2. Տրված են 1, 2, 3, …, 230 երկարությամբ հատվածներ: Ապացուցել, որ դրանցից ցանկացած 12-ից կգտնվեն երեքը, որոնցից կարելի է կազմել եռանկյուն:

3. Ապացուցել, որ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, եթե հայտնի է, որ $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ և

$\angle A-\angle C=\angle A_1-\angle C_1>0$:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր:

Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /20, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի երկրորդ օր

8-րդ դասարան

4. Ապացուցել, որ ցանցացած m բնական թվի դեպքում $2011+2$, $2011+2^2$, $2011+2^3$, …, $2011+2^{4m}$ թվերից ամենաշատը m թվեր կարող են լինել պարզ:

5.Հայտնի է, որ a, b, c դրական թվերի գումարը հավասար է մեկի: Ապացուցել $\mathbf{ab}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{bc}(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{ac}(\mathbf{a}+\mathbf{c})\leq\frac{1}{4}$ անհավասարությունը:

6. Հայտնի է, որ M կետը գտնվում է AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան ներսում, բացի այդ՝ $\angle$MBA=10^0, $\angle$MBC=30^0 և BM=AC : Գտնել MCA անկյունը:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքնչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր:

Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /19, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի առաջին օր

9-րդ դասարան

1.Տրված են 1, 2, 3, …, 230 երկարությամբ հատվածներ: Ապացուցել, որ դրանցից ցանկացած 12-ից կգտնվեն երեքը, որոնցից կարելի է կազմել եռանկյուն:

2. Հայտնի է , որ եռանկյան կիսորդների հատման կետը հավասարապես է հեռացված նրա բոլոր կողմերի միջնակետերից: Ապացուցել, որ այդ եռանկյունը հավասարակողմ է:

3. Հայտնի է, որ երեք զույգ առ զույգ իրարից տարբեր բնական թվերից ցանկացած երկուսի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի գումարը բաժանվում է երրորդ թվի վրա: Գտնել այդպիսի բոլոր թվերը:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր:

Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /20, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի երկրորդ օր

9-րդ դասարան

4. Ապացուցել անհավասարությունը. $(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)\geq abc(a+b)(b+c)(c+a)$, որտեղ $a>0$, $b>0$, $c>0$:

5. Դիցուք՝ p-ն և q-ն տրված բնական թվեր են, ընդ որում q–ն կենտ է: Կարո՞ղ է արդյոք $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{|x-y|}=\frac{p}{q}$ հավասարման բնական թվերով լուծումների քանակը հավասար լինել տասի:

6. Հայտնի է, որ M կետը գտնվում է AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան ներսում, բացի այդ՝ $\angle MBA=10^0$, $\angle MBC=30^0$ և BM=AC : Գտնել AMC եռանկյան անկյունները:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր:

Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /19, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի առաջին օր

10-րդ դասարան

1. Հնարավո՞ր է արդյոք $1^3+2^3+3^3+\ldots+2011^3$ գումարը ներկայացնել 2**010** հատ բնական թվերի խորանարդների գումարի տեսքով:

2. Ապացուցել, որ $2^{2^1}+1, 2^{2^2}+1, \ldots, 2^{2^n}+1, \ldots$ հաջորդականությունն ու ցանկացած աճող և անվերջ թվաբանական պրոգրեսիա կա՛մ մեկից ավելի ընդհանուր անդամ չունեն , կա՛մ անվերջ թվով ընդհանուր անդամներ ունեն:

3. Հայտնի է , որ ABCD ներգծյալ քառանկյան AB և AD կողմերը հավասար են, բացի այդ՝ CD և CB կողմերի վրա համապատասխանաբար տրված են M և N ներքին կետերն այնպես, որ DM+BN=MN: Ապացուցել, որ AMN եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է AC հատվածի վրա:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր:

Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /20, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի երկրորդ օր

10-րդ դասարան

4.Կասենք, որ n բնական թիվը «յուրահատուկ» է, եթե $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$ թվերից ընտրված առավելագույն թվով իրարից տարբեր թվերը հանդիսանում են մի որևէ բնական թվի բոլոր դրական բաժանարարները: Գտնել բոլոր «յուրահատուկ» թվերը:

(Այստեղ $\tau(n)$ -ով նշանակված է n բնական թվի բոլոր դրական բաժանարարների քանակը):

5.Հայտնի է, որ ABC եռանկյան B անկյունը հավասար է 120^0-ի, և այդ եռանկյան ներգծյալ շրջանագիծը AB և BC կողմերը շոշափում է համապատասխանաբար P և Q կետերում : Դիցուք՝ K կետն AC կողմի միջնակետի համաչափ կետն է PQ ուղղի նկատմամբ: Գտնել AKC անկյունը:

6. Գտնել n–ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ 8x8 չափսերի շախմատային տախտակի ցանկացած n վանդակներից կարելի է ընտրել երկու այնպիսի վանդակ, որ ձիուն անհրաժեշտ կլինի կատարել ոչ պակաս քան երեք քայլ՝ մի վանդակից մյուսն անցնելու համար:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր:

Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /19, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի առաջին օր

11-րդ դասարան

1.Գոյությու՞ն ունի արդյոք f ֆունկցիա այնպես, որ f:R®R և յուրաքանչյուր x և y թվերի համար, որտեղ x>y, տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը. $f(x)-f(y)>\sqrt{x-y}$:

2. Վեցանկյան տրամագիծը հավասար է D-ի, իսկ d-ն այնպիսի թիվ է, որ $d>\frac{D}{2}$:Վեցանկյան յուրաքանչյուր կողմը ընդունելով որպես հիմք՝ կառուցված է d սրունքով հավասարասրուն եռանկյուն: Ապացուցել, որ կառուցված բոլոր եռանկյունների մակերեսների գումարը մեծ է d կողմերով և D անկյունագծով շեղանկյան մակերեսից:

(Բազմանկյան տրամագիծ է կոչվում նրա կողմերից և անկյունագծերից ամենամեծի երկարությունը):

3. Գտնել a, m, n, k բնական թվերի այն բոլոր (a, m, n, k) հավաքածուները, եթե հայտնի է, որ $(a^m+1)(a^n-1)=15^k$:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքնչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր:

Մաթեմատիկայի հանրապետական 51-րդ օլիմպիադա

Եզրափակիչ փուլ /20, մարտ, 2011թ./

Մրցույթի երկրորդ օր

11-րդ դասարան

4. 1, 2, …, 31 թվերից ամենաշատը քանի՞ թիվ կարելի է ընտրել այնպես, որ ընտրված թվերից ցանկացած երկուսի գումարը լրիվ քառակուսի չլինի:

5. ABCD քառանկյան համար հայտնի է, որ $\angle A=\angle C=60^0$ և $\angle B=100^0$: Գտնել AO_2 և CO_1 ուղիղների կազմած անկյունը, որտեղ O_1 և O_2 կետերը համապատասխանաբար ABD և CBD եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի կենտրոններն են:

6. Գտնել n–ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ 8x8 չափսերի շախմատային տախտակի ցանկացած n վանդակներից կարելի է ընտրել երկու այնպիսի վանդակ, որ ձիուն անհրաժեշտ կլինի կատարել ոչ պակաս քան երեք քայլ՝ մի վանդակից մյուսն անցնելու համար:

Աշխատաժամանակը՝ 4,5 ժամ:

Յուրաքնչյուր խնդիր գնահատված է 7 միավոր

Լուծումներ, ցուցումներ, պատասխաններ

8-րդ դասարան

1.Պատ.՝ հնարավոր է:

Բավական է տրված գումարում $1^3+6^3+7^3+8^3$ գումարը փոխարինել $2^3+4^3+10^3$ գումարով:

2.Դիցուք՝ տրված հատվածներից ընտրել ենք $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ երկարությամբ հատվածները, ընդ որում՝ $1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{12} \le 230$: Ապացուցենք, որ այդ ընտրված հատվածներից ինչ-որ երեքով կարելի է կառուցել եռանկյուն: Ենթադրենք ընտրված հատվածներից ցանկացած երեքով եռանկյուն կառուցել հնարավոր չէ, այդ դեպքում՝ $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant x_1+x_2$, հետևաբար՝ $x_3 \geqslant 3$, համանմանորեն կստանանք՝ $x_4 \geqslant x_3+x_2$, ուստի՝ $x_4 \geqslant 5$, $x_5 \geqslant 8$, $x_6 \geqslant 13$, $x_7 \geqslant 21$, $x_8 \geqslant 34$, $x_9 \geqslant 55$, $x_{10} \geqslant 89$, $x_{11} \geqslant 144$, $x_{12} \geqslant 233$, ինչը հնարավոր չէ:

Ուրեմն՝ մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, այսինքն՝ կգտնվեն երեք հատվածներ, որոնցով կարելի է կառուցել եռանկյուն:

3.Տրված եռանկյունների BC և B_1C_1 կողմերի վրա համապատասխանաբար ընտրենք D և D_1 կետերն այնպես, որ $\angle DAC=\angle C$ և $\angle D_1A_1C_1=\angle C_1$: Նկատենք, որ

$$\angle BAD=\angle A-\angle C=\angle A_1-\angle C_1=\angle B_1A_1D_1:$$

Ապացուցենք, որ $AD=A_1D_1$: Ենթադրենք $AD \neq A_1D_1$, ասենք՝ $AD<A_1D_1$, այդ դեպքում, եթե A_1D_1 հատվածի վրա ընտրենք D_2 կետն այնպես, որ $A_1D_2=AD$, ապա $DABD=DA_1B_1D_2$, իսկ համաձայն եռանկյան անհավասարության՝ կունենանք՝ $B_1D_2<B_1D_1+D_2D_1$, հետևաբար՝ $BC=CD+BD=AD+BD=A_1D_2+B_1D_2< A_1D_2+D_2D_1+B_1D_1=A_1D_1+B_1D_1=C_1D_1+B_1D_1=B_1C_1$, ուստի՝ $BC<B_1C_1$, ինչը հնարավոր չէ:

Այսպիսով՝ $AD=A_1D_1$, հետևաբար՝ $\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$, որտեղից կստանանք $\angle B=\angle B_1$, ուստի՝ $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$:

4.Նկատենք, որ երկուսի կենտ ցուցիչով աստիճանը երեքի բաժանելիս տալիս է երկու մնացորդ: Հետևաբար, $2011+2$, $2011+2^3, \ldots$, $2011+2^{4m-1}$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է երեքի, ուստի՝ դրանք բոլորը բաղադրյալ թվեր են:

Նկատենք նաև, որ $2011+2^2$, $2011+2^6, \ldots$, $2011+2^{4m-2}$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է հինգի, ուստի՝ դրանք բոլորը ևս բաղադրյալ թվեր են:

Վերևում ասվածներից հետևում է, որ տրված թվերից պարզ թվեր կարող են լինել միայն $2011+2^4$, $2011+2^8, \ldots$, $2011+2^{4m}$ թվերը, իսկ դրանց քանակը հավասար է m-ի, ուստի՝ խնդրի պնդումն ապացուցված է:

5. Նկատենք, որ

$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=$

$=aa(1-a)+bb(1-b)+cc(1-c)\leq\frac{1}{4}(a+b+c)=\frac{1}{4}$, այստեղ օգտագործեցինք $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ անհավասարությունը: / *Վ. Գ. Հայրիյան*/

6. Պատ.՝ 30^0:

Դիցուք՝ D և A կետերը գտնվում են BC ուղղի միևնույն կողմում և $\Delta DBC=\Delta ACB$: BM ճառագայթի և CD ուղղի հատման կետը նշանակենք K–ով: Ունենք՝ $\angle BDC=70^0$ և $\angle DBK=40^0$, հետևաբար՝ $\angle BDK=\angle BKD$, ուստի՝ BK=BD=AC=BM: Այսինքն՝ M և K կետերը համընկնում են, հետևաբար՝ $\angle MCA=\angle KCA=30^0$:

9-րդ դասարան

1.Տե՛ս 8-րդ դասարանի 2-րդ խնդրի լուծումը:

2. ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետը նշանակենք I–ով, իսկ BC, AC և AB կողմերի միջնակետերը՝ համապատասխանաբար A_1-ով, B_1-ով և C_1-ով: Ապացուցենք հետևյալ լեմմը:

Լեմմ: Եթե $IA_1=IB_1=IC_1$ և $AB\neq AC$, ապա $\angle A=60^0$:

Իրոք, դիտարկենք C_1 կետի համաչափ կետը AI ուղղի նկատմամբ, թող այդ կետը լինի C_2-ը: Պարզ է, որ C_2 կետը գտնվում է AC ճառագայթի վրա և $IC_2=IC_1=IB_1$, հետևաբար՝ $\angle AC_1I=\angle AC_2I=180^0-\angle IC_2B_1=180^0-\angle IB_1A$, ուստի AC_1IB_1 քառանկյունը ներգծյալ է: Մյուս կողմից I–ն $A_1B_1C_1$ եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է, բացի այդ՝ I և A_1 կետերը գտնվում են B_1C_1 ուղղի միևնույն կողմում, հետևաբար՝ $\angle A=\angle B_1A_1C_1=0{,}5\angle B_1IC_1==0{,}5(180^0-\angle A)$, որտեղից՝ $\angle A=60^0$: Լեմմն ապացուցված է:

Անցնենք խնդրի պնդման ապացույցին: Եթե ABC եռանկյունը հավասար կողմեր չունի, ապա համաձայն լեմմի՝ $\angle A=60^0$, $\angle B=60^0$, ինչը հնարավոր չէ: Եթե ABC եռանկյունը հավասարասրուն է, սակայն հավասարակողմ չէ, ասենք՝ $AB=AC\neq BC$, ապա համաձայն լեմմի՝ $\angle C=60^0$, հետևաբար՝ $\angle B=60^0$, ինչը հնարավոր չէ:

Ուրեմն՝ ABC եռանկյունը հավասարակողմ է:

3. Պատ.՝ n,2n, 3n կամ 2n, 3n, 7n, որտեղ n–ը ցանկացած բնական թիվ է:

Դիցուք՝ a,b, c թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին: Առանց ընդհանրությունը խախտելու՝ կարող ենք համարել, որ a,b, c թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են: Իրոք, եթե օրինակ a և b թվերը փոխադարձաբար պարզ չլինեն, ապա a և b թվերը կունենան մի որևէ ընդհանուր p պարզ բաժանարար: Իսկ համաձայն խնդրի պայմանի (a,c)+[a,c] թիվը բաժանվում է b-ի, հետևաբար (a,c) թիվը կբաժանվի p–ի, այդ դեպքում p–ի կբաժանվի նաև c-ն:

Համաձայն $(\frac{a}{p},\frac{b}{p})=\frac{(a,b)}{p}$ և $[\frac{a}{p},\frac{b}{p}]=\frac{[a,b]}{p}$ հատկությունների՝ կստանաք, որ $\frac{a}{p},\frac{b}{p},\frac{c}{p}$ թվերը նույնպես բավարարում են խնդրի պայմաններին, հասկանալի է, որ այդպիսի մի քանի փոխարինումներից հետո ստացված թվերը դարձյալ կբավարարեն խնդրի պայմաններին և զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ կլինեն:

Այսպիսով՝ a,b, c թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են, հետևաբար համաձայն խնդրի պայմանի 1+[b,c], 1+ [a,c], 1+ [a,b] թվերը բաժանվում են համապատասխանաբար a–ի, b-ի, c-ի, ուստի 1+[b,c]+[a,c]+[a,b] թիվը բաժանվում է a–ի, b-ի և c-ի, հետևաբար այն կբաժանվի նաև abc-ի: Վերջինից հետևում է, որ $1+[b,c]+[a,c]+[a,b]^{3}$ abc, հետևաբար համաձայն $xy^{3}[x,y]$ հատկության, կստանանք $1+bc+ac+ab^{3}$ abc (1): Առանց ընդհանրությունը խախտելու՝ կարող ենք համարել, որ a>b>c, հետևաբար (1)-ից կստանանք 1+3ab>abc, ուստի՝ 1>ab(c-3), որտեղից կստանանք $c\in\{1, 2, 3\}$:

Երբ c=1, այդ դեպքում, համաձայն խնդրի պայմանի 1+b թիվը բաժանվում է a-ի, հետևաբար 1+b=a, իսկ այն պայմանից, որ 1+a թիվը բաժանվում է b-ի, կստանանք՝ b=2, a=3: Ստացված եռյակը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Երբ c=2, այդ դեպքում, համաձայն խնդրի պայմանի 1+2b թիվը բաժանվում է a-ի, հետևաբար՝ 1+2b=a, իսկ այն պայմանից, որ 1+2a թիվը բաժանվում է b-ի, կստանանք b=3, a=7: Ստացված եռյակը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Երբ c=3, այդ դեպքում, համաձայն խնդրի պայմանի 1+3b թիվը բաժանվում է a-ի, հետևաբար՝ 1+3b=a կամ 1+3b=2a, իսկ այն պայմանից, որ 1+3a թիվը բաժանվում է b-ի, կստանանք b=4, a=13 կամ b=5, a=8, անմիջական ստուգումով համոզվում ենք, որ այդ եռյակներից ոչ մեկը խնդրի պայմաններին չի բավարարում:

Նկատի ունենալով լուծման սկզբում ասվածը և այն փաստը, որ եթե a,b, c թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին, և n-ը ցանկացած բնական թիվ է, ապա na, nb, nc թվերը ևս բավարարում են խնդրի պայմաններին, կստանաք պատասխանը:

4. Ունենք, որ $x^3+y^3-xy(x+y)=(x+y)(x-y)^2\geq 0$, եթե x>0 և y>0: Նկատենք, որ $(a^2+bc)(b^2+ac)=a^2b^2+(a^3+b^3)c+abc^2$, համաձայն $x^3+y^3\geq xy(x+y)$անհավասարության՝ կստանանք $(a^2+bc)(b^2+ac)\geqslant a^2b^2+ab(a+b)c+abc^2 =ab(a+c)(b+c)$, համանմանորեն կունենանք՝ $(b^2+ac)(c^2+ab)\geqslant bc(a+c)(b+a)$ և $(a^2+bc)(c^2+ab)\geqslant ac(b+c)(b+a)$: Բազմապատկելով վերջին երեք անհավասարությունները՝ կստանանք ապացուցվելիք անհավասարությունը:

5.Պատ.՝ չի կարող:

Նկատենք, որ եթե (x_0, y_0) թվազույգը տրված հավասարման լուծում է, ընդ որում $x_0>y_0$, ապա հետևյալ թվազույգերը ևս կլինեն տրված հավասարման լուծումներ. (y_0, x_0), (x_0, x_0- y_0), (x_0- y_0, x_0):

Եթե այդ չորս թվազույգերից ինչ-որ երկուսը համընկնում են, ապա $x_0=2y_0$, այդ դեպքում տրված հավասարումից կստանանք $5q=2py_0$, ինչը հնարավոր չէ, որովհետև q-ն կենտ թիվ է: Այդ չորս թվազույգերին կանվանենք «բարեկամ» թվազույգեր:

Այսպիսով, տրված հավասարումը կա՛մ լուծում չունի, կա՛մ նրա բոլոր լուծումները կարելի է բաժանել «բարեկամ» թվազույգերի, ուստի տրված հավասարման լուծումների քանակը չորսի բազմապատիկ թիվ է, հետևաբար այն տասը լինել չի կարող:

6. Պատ.՝ 50^0, 30^0, 100^0:

Դիցուք՝ K-ն ABC եռանկյան ներսում գտնվող այնպիսի կետ է, որ AK=KC=AC: Նկատենք, որ $\Delta ABK=\Delta CBK$, համաձայն եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի, հետևաբար՝ $\angle ABK=\angle CBK=20^0$: Ունենք, որ $\angle KAB=\angle BAC-\angle KAC=70^0-60^0=10^0=\angle ABM$, բացի այդ՝ BM=AC=AK, հետևաբար՝ $\Delta BAK=\Delta ABM$, համաձայն եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի: Վերջինից կստանանք՝ $\angle MAB=\angle KBA=20^0$, հետևաբար՝ $\angle MAC=50^0$, ունենք նաև $\angle MCA=30^0$ (տե՛ս 8–րդ դասարանի 6–րդ խնդրի լուծումը), ուստի՝ $\angle AMC=100^0$:

10-րդ դասարան

1. Տե՛ս 8-րդ դասարանի առաջին խնդրի լուծումը:

2. Դիցուք՝ $x_n=2^{2^n}+1$, n=1, 2,…: Եթե m և k բնական թվերն այնպիսին են, որ m>k և x_m ու x_k անդամները որևէ աճող թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ են, ապա $x_m-x_k=dl$, որտեղ d–ն այդ թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունն է, իսկ l–ը բնական թիվ է: Նկատենք, որ $x_{2m-k}-x_m=2^{2^{2m-k}}-2^{2^m}=2^{2^m}(2^{2^{2m-k}-2^m}-1)=2^{2^m}((2^{2^{m-k}-1})^{2^m}-1)$ թիվը բաժանվում է $2^{2^k}((2^{2^{m-k}-1})^{2^k}-1)=2^{2^m}-2^{2^k}=x_m-x_k=dl$ թվի վրա, ուստի x_{2m-k} թիվը ևս կլինի այդ թվաբանական պրոգրեսիայի անդամ: Ասվածից հետևում է, որ x_k , x_m, x_{2m-k} , x_{3m-2k},… անվերջ թվով անդամները կլինեն այդ թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներ: Այստեղից էլ ստացվում է խնդրի պնդման ապացույցը:

3. CD ճառագայթի վրա, CD հատվածից դուրս ընտրենք K կետն այնպես, որ DK=NB: Ունենք, որ $\angle KDA=180^0-\angle ADC=\angle ABN$, AD=AB, DK=NB, հետևաբար $\Delta KDA=\Delta NBA$: Վերջինից կստանանք KA=AN և $\angle KAD=\angle NAB$:

Ունենք, որ AK=AN, MK=MD+DK=MD+NB=MN, հետևաբար ΔKMA=ΔNMA, ուստի՝ $\angle MAN = \angle MAK = \angle MAD + \angle DAK = \angle MAD + \angle NAB$, իսկ վերջինից կստանանք $\angle MAN = 0,5\angle DAB$: Դիցուք՝ CMN եռանկյան արտագծյալ շրջանագիծը AC ուղղի հետ հատվում է C և O կետերում: Ունենք, որ AD=AB, հետևաբար՝ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB}$ և $\angle$MCO=$\angle$NCO, որտեղից MO=NO: Մնում է նկատել, որ $\angle$MON=180^0-$\angle$DCB=$\angle$DAB=2$\angle$MAN, իսկ վերջինը նշանակում է, որ O կետը գտնվում է AC հատվածի վրա, և այն AMN եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է:

4. Պատ.՝ 1, 2, 3:

Ապացուցենք, որ եթե n բնական թիվը մեծ է 3-ից, ապա այն «յուրահատուկ» չէ: Դիցուք՝ max(τ(1), τ(2), …, τ(n))=τ(k)=m , ունենք, որ k≥4 և $k = p_1^{\alpha_1} \cdot_{\dots} \cdot p_s^{\alpha_s}$, որտեղ p_1, …, p_s թվերը իրարից տարբեր պարզ թվեր են, իսկ α_1,…, α_s բնական թվեր են: Նկատենք, որ $m = a(\alpha_i + 1)$, որտեղ a-ն k բնական թվի այն բոլոր բաժանարարների քանակն է, որոնք չեն բաժանվում p_i–ի: Համաձայն խնդրի պայմանի՝ m⁝τ(4)=3, հետևաբար՝ ինչ-որ i–ի համար α_i>1: Այդ դեպքում՝ m⁝$\tau(\frac{k}{p_i})$= aα_i, ուստի՝ α_i+1⁝α_i , ինչը հնարավոր չէ:

Անմիջական ստուգումով համոզվում ենք, որ 1, 2, 3 թվերից յուրաքանչյուրը «յուրահատուկ» է:

5. Պատ.՝ 90^0:

AC կողմի միջնակետը նշանակենք S–ով, իսկ ABC եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի և AC կողմի ընդհանուր կետը՝ R-ով: A, S և C կետերից PQ ուղղին տանենք AA_1, SS_1 և CC_1 ուղղահայացները ($A_1, S_1, C_1 \in PQ$): Ունենք, որ BP=BQ, հետևաբար՝ $\angle$APA$_1$=$\angle$BPQ=30^0, ուստի՝ AA_1=0,5AP, համանմանորեն կստանանք՝ CC_1=0,5CQ, իսկ SK=2SS_1=AA_1+CC_1=0,5(AP+CQ)=0,5(AR+RC)=0,5AC: Վերջինից հետևում է, որ կետը K գտնվում է AC տրամագծով շրջանագծի վրա, հետևաբար $\angle$AKC=90^0:

6. Պատ.՝ 10:

		+		+			
	+				+		
			+				
	+				+		
		+		+			

2	2	4	7	1
3	5	10	6	8
4	7	1	9	3
6	6	8	5	5
1	9	3	4	2

նկ. 1 նկ. 2

Նկ.1-ում բերված օրինակը ցույց է տալիս, որ n≥10: Ապացուցենք, որ եթե շախմատային տախտակի վրա նշված են ցանկացած 10 վանդակներ, ապա դրանցից կարելի է ընտրել երկու այնպիսի վանդակ, որ ձիուն անհրաժեշտ կլինի կատարել ոչ պակաս քան երեք քայլ՝ մի վանդակից մյուսն անցնելու համար:

Պնդումն ապացուցենք հակասող ենթադրության եղանակով: Ենթադրենք գոյություն ունեն այնպիսի 10 վանդակներ, որ դրանցից յուրաքանչյուր երկուսի համար ձին մեկից մյուսը կարող է գնալ մեկ կամ երկու քայլով: Դիտարկենք ուղղաձիգ (հորիզոնական) ուղղությամբ ամենափոքր լայնությամբ այն շերտը, որը պարունակում է այդ բոլոր 10 վանդակները: Դժվար չէ հասկանալ, որ այդ շերտի լայնությունը մեծ չէ 5-ից: Ասվածից հետևում է, որ այդ վանդակները գտնվում են 5x5 չափերով քառակուսու ներսում: Այդ 5x5 չափսի քառակուսու վանդակները համարակալենք 1, 2,…, 10 թվերով հետևյալ կերպ (նկ. 2):

Պարզ է , որ նշված 10 վանդակներից յուրաքանչյուր երկուսը կունենան տարբեր համարներ, որովհետև միևնույն համարի ցանկացած երկու վանդակներից մեկից մյուսը գնալու համար ձին կկատարի առնվազը երեք քայլ: Հետևաբար, 10 համարն ունեցող վանդակը նշված 10 վանդակներից մեկն է: Համանմանորեն կապացուցենք, որ ստվարագծված յուրաքանչյուր վանդակ նշված 10 վանդակներից մեկն է:

Այդ դեպքում դժվար չէ հասկանալ, որ մնացած ոչ մի վանդակ նշված 10 վանդակներից չէ: Հետևաբար, նշված վանդակների թիվը չորս է, ինչը հնարավոր չէ: Ուրեմն՝ մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, այսինքն՝ պնդումն ապացուցված է:

11-րդ դասարան

1. Պատ.՝ գոյություն չունի:

Պնդումն ապացուցենք հակասող ենթադրության եղանակով: Ենթադրենք՝ այդպիսի f ֆունկցիա գոյություն ունի:

Նկատենք, որ եթե n-ը (n>1) բնական թիվ է, ապա՝

$$f(1)-f(0)=f(1)-f(\tfrac{n-1}{n})+f(\tfrac{n-1}{n})-f(\tfrac{n-2}{n})+\ldots+f(\tfrac{1}{n})-f(0)>\sqrt{\tfrac{1}{n}}+\sqrt{\tfrac{1}{n}}+\cdots+\sqrt{\tfrac{1}{n}}=\sqrt{n}\ :$$

Այսպիսով, յուրաքանչյուր n բնական թվի համար ստացանք, որ $f(1)-f(0)>\sqrt{n}$, ինչը հնարավոր չէ: Ուրեմն մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, այսինքն՝ խնդրի պայմանը բավարարող ֆունկցիա գոյություն չունի:

2. Դիցուք՝ $A_1A_2\ldots A_6$ վեցանկյան տրամագիծը հավասար է D-ի:

D, A_1A_2, A_2A_3,…, A_6A_1 հիմքերով և d սրունքներով հավասարասրուն եռանկյունների գագաթի անկյունները համապատասխանաբար նշանակենք 2α-ով, $2\alpha_1$-ով, $2\alpha_2$-ով,…, $2\alpha_6$-ով: Ունենք, որ $A_1A_2\le D$, $A_2A_3\le D$,…,$A_6A_1\le D$, հետևաբար՝ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6\le\alpha<\frac{\pi}{2}$: Համաձայն բեկյալի երկարությանմասին թեորեմի՝ $A_1A_2+A_2A_3+\ldots+A_6A_1>2D$, հետևաբար՝

$2d\sin\alpha_1+2d\sin\alpha_2+\ldots+2d\sin\alpha_6>4d\sin\alpha$, ուստի՝ $\frac{1}{2}d^2\sin2\alpha_1+\frac{1}{2}d^2\sin2\alpha_2+\ldots+$

$+\frac{1}{2}d^2\sin2\alpha_6=d^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+d^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\ldots+d^2\sin\alpha_6\cos\alpha_6\geq d^2\cos\alpha(\sin\alpha_1+ +\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_6)>$

$>2d^2\cos\alpha\sin\alpha=d^2\sin2\alpha$:

Պնդումն ապացուցված է:

3. Պատ.՝ (4, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1):

Երբ n–ը կենտ է:

Նկատենք, որ $(a^m+1, a^n-1)=1$: Իրոք, հակառակ դեպքում կունենանք, որ գոյություն ունի p (p>2) պարզ թիվ այնպես, որ $a^m+1⋮p$ և $a^n-1⋮p$: Հետևաբար՝ $a^{mn}+1⋮p$ և $a^{mn}-1⋮p$, ուստի՝ $2=a^{mn}+1-(a^{mn}-1)⋮p$, ինչը հնարավոր չէ:

Ասվածից հետևում է, որ հնարավոր են հետևյալ երեք դեպքերը:

ա) $a^m+1=15^k$ (1) և $a^n-1=1$ (2):

(2)-ից կստանանք, որ a=2, իսկ (1)-ից և $15^k-1⋮7$ փաստից կստանանք, որ $2^m⋮7$, ինչը հնարավոր չէ:

բ) $a^m+1=5^k$ (3) և $a^n-1=3^k$ (4):

Երբ k-ն զույգ թիվ է, այդ դեպքում (3)-ից կստանանք $a⋮3$, իսկ համաձայն (4)-ի դա հնարավոր չէ:

Երբ k-ն կենտ թիվ է, այդ դեպքում 3^k+1 թիվը 8-ի բաժանելիս կտա 4 մնացորդ, հետևաբար (4)-ից կստանանք n=1:

Այդ դեպքում (3)-ից կստանանք m=1 և $5^k-3^k=2$, ուստի՝ k=1, a=4:

գ) $a^m+1=3^k$ (5) և $a^n-1=5^k$ (6):

5^k+1 թիվը 4-ի բաժանելիս կտա 2 մնացորդ, հետևաբար (6)-ից կստանանք n=1: Այդ դեպքում (5) -ը հնարավոր չէ:

Երբ n–ը զույգ է:

Դիցուք՝ n=4s, որտեղ s-ը բնական թիվ է: Ունենք, որ

$$a^n-1=a^{4s}-1=\left(a^{2s}-1\right)\left(a^{2s}+1\right)=\left(a^s-1\right)\left(a^s+1\right)\left(a^{2s}+1\right),$$

նկատենք, որ $2=a^{2s}+1-(a^{2s}-1)$, հետևաբար՝

$(a^{2s}-1, a^{2s}+1)=1$ և $(a^s-1, a^s+1)=1$, ուստի՝ $a^s-1=1$: Վերջինից կստանանք $s=1$, $a=2$ և $2^m+1=15^{k-1}$: Հետևաբար՝ $2^m+1⋮3$, ուստի՝ m–ը կենտ է, իսկ $2^m+1⋮5$ պայմանից հետևում է, որ m–ը զույգ է, ինչը հնարավոր չէ:

Դիցուք՝ $n=2s$, որտեղ s-ը բնական թիվ է և կենտ է:

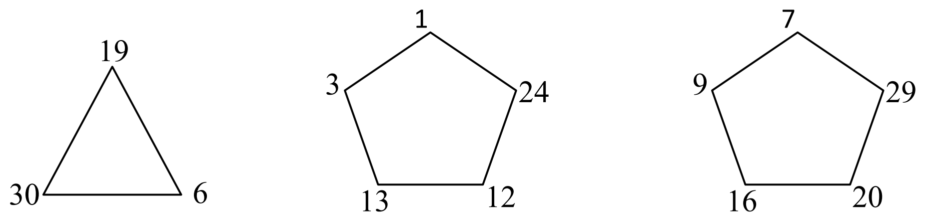
Նկատենք, որ $(a^m+1, a^s-1)=1$ և $(a^s-1, a^s+1)=1$, հետևաբար՝ $a^s-1=1$ կամ $a^s-1=3^k$:

Երբ $a^s-1=1$, կստանանք $s=1$, $a=2$ և $2^m+1=5\cdot15^{k-1}$, հետևաբար՝ $k=1$, $m=2$, $n=2$:

Երբ $a^s-1=3^k$ (7), կստանանք $a^s+1=5^u$ (8) և $a^m+1=5^v$ (9), որտեղ $u+v=k$: (7)-ից և (8)-ից կստանանք $5^u-3^k=2$, հետևաբար՝ u–ն և k-ն կենտ թվեր են: (8)-ից կստանանք $a+1=5^p$, իսկ (7)-ից կստանանք $s=1$, որովհետև 3^k+1 թիվը 8-ի չի բաժանվում: Հետևաբար՝ (9)-ից կստանանք, որ v-ն կենտ թիվ է, ինչը հնարավոր չէ: /*Վ. Ա. Սայանյան, Ն. Մ. Մեղրակյան*/

4.Պատ.՝14:

Նկատենք, որ գծիկով միացված ցանկացած երկու թվերի գումարը լրիվ քառակուսի է. 2—14, 4—5, 8—7, 10—15, 11—25, 18—31, 21—28, 22—27, 23—26,



Վերևում ասվածից հետևում է՝ տրված թվերից ամենաշատը կարող ենք ընտրել 9+1+2+2=14 թվեր, որոնցից ցանկացած երկուսի գումարը լրիվ քառակուսի չէ:

Բերենք 14 թվերի օրինակը, որոնցից ցանկացած երկուսի գումարը լրիվ քառակուսի չէ. 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 22, 24, 26, 28, 29, 31:

5. Պատ.՝10^0:

Նկատենք, որ $\angle BO_1D=90^0+\frac{1}{2}\angle A=120^0$ և $\angle C=60^0$, հետևաբար O_1BCD քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Ուստի՝ $\angle DO_1C=\angle DBC$, որտեղից՝ $\angle CMD=\angle DBC+\frac{1}{2}\angle ADB$, որտեղ M կետը BD և CO_1 ուղիղների հատման կետն է:Հ ամանմանորեն կստանանք, որ $\angle AND=\angle ABD+\frac{1}{2}\angle BDC$, որտեղ N կետը BD և AO_2 ուղիղների հատման կետն է: Նկատենք, որ AO_2 և CO_1 ուղիղների կազմած φ անկյունը որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\varphi=|\angle CMD-(180^0-\angle AND)|=|\angle CMD+\angle AND-180^0|=|\angle B+\angle D-180^0|=|100^0+70^0-180^0|=10^0:$$

6. Տե՛ս 10-րդ դասարանի 6-րդ խնդրի լուծումը:

Խնդիրնե հեղինակել են՝

Ն. Մ. Սնդրակյան-8.1, 8.3, 8.6, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 10.2, 10.3, 10.6, 11.1, 11.2, 11.4, 11.5:

Գ. Ա. Ներսիսյան-8.2, 8.4, 10.5:

Վ. Գ. Հայրիյան-8.5:

Մ. Միրզոյան-9.6:

Վ.Ա. Ասլանյան-11.3:

Տ. Լ. Հակոբյան-10.4:

Լուծումները՝ Ն.Մ. Սնդրակյանի: