**¶ñÇ·áñ ´³Õ¹³ë³ñÛ³ÝÇ ³Ýí³Ý ûÉÇÙåÇ³¹³-2013**

**Ø³Ã»Ù³ïÇÏ³**

## XI-XII դասարան

1) Գտեք  արտահայտության փոքրագույն արժեքը, որտեղ  և  :

Լուծում::քանի, որ կամայականհամար : Հավասարությունը տեղի ունի, երբ :

(Կարելի է նաև օգտվել անհավասարությունից);

2)  սուրանկյուն եռանկյան գագաթով և արտագծած շրջանագծի  կենտրոնով անցնող շրջանագիծը  և  հատվածները հատում է համապատասխանաբար  և  կետերում:  կետով  հատվածին տարված ուղղահայացը  կողմը հատում է , PQ-ն K կետում, իսկ  շրջանագիծը՝  կետում: Ապացուցեք, որ :

Լուծում: ,

 

իսկ , որպես  եռանկյան արտաքին անկյուն, հետևաբար , հետևաբար  քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: , ուստի  եռանկյունը հավասարասրուն է, հետևաբար :

\*Դիտողություն: Կարելի է ապացուցել, որ –ը  եռանկյան օրթոկենտրոնն է:

3) Տրված է  չափի վանդակավոր քառակուսի, որի որևէ վանդակներից մեկի կենտրոնում գտնվում է մրջյունը: Մրջյունը յուրաքանչյուր քայլում կարող է շարժվել է ուղիղ գծով դեպի հարևան վանդակի կենտրոնը և հասնելով հարևան վանդակը պտտվել –ով (հարևան վանդակները ունեն ընդհանուր կողմ): Ամենաշատը քանի՞ քայլ կարող է կատարել մրջյունը, որպեսզի վերադառնա սկզբնական վանդակը, եթե յուրաքանչյուր վանդակով անցնում է ամենաշատը մեկ անգամ:

Լուծում: Աղյուսակի վանդակները ներկենք չորս գույնով, ինչպես աղյուսակ 1–ում: Այդպիսի ներկման դեպքում մրջյունի ճանապարհը ունի  տեսքը, ընդորում գույները կրկնվում են 4 պարբերությամբ: Նկատենք, որ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
|  3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |

 աղյուսակ 1

4 գույնի վանդակները 16 հատ են, ուստի մրջյունը կարող է կատարել 64 քայլ:

 Օրինակը՝ աղյուսակ 2–ում:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 64 |  |  | 41 | 40 |  |  |
| 3 | 2 | 63 | 62 | 43 | 42 | 39 | 38 |  |
| 4 | 5 | 60 | 61 | 44 | 45 |  | 37 | 36 |
| 7 | 6 | 59 | 58 |  | 46 | 47 | 34 | 35 |
| 8 | 9 | 56 | 57 |  | 49 | 48 | 33 | 32 |
| 11 | 10 | 55 | 54 | 51 | 50 |  | 30 | 31 |
| 12 | 13 |  | 53 | 52 |  |  | 29 | 28 |
|  | 14 | 15 | 18 | 19 | 22 | 23 | 26 | 27 |
|  |  | 16 | 17 | 20 | 21 | 24 | 25 |  |

 աղյուսակ 2

**X ¹³ë³ñ³Ý**

1. ¸Çóáõù a,b,c,d,e,f –Á áñáß³ÏÇ Ãí»ñ »Ý, áñï»Õ : Ð³ÛïÝÇ ¿, áñ x ÷á÷áË³Ï³ÝÇ Ï³Ù³Û³Ï³Ý ³ñÅ»ùÇ ¹»åùáõÙ : ²å³óáõó»É, áñ :
2. ²ÙµáÕç ·áñÍ³ÏÇóÝ»ñáí µ³½Ù³Ý¹³ÙÇ ·ñ³ýÇÏÇ íñ³ Ýßí³Í »Ý »ñÏáõ ³ÙµáÕç Ïááñ¹ÇÝ³ïÝ»ñáí Ï»ï»ñ: ²å³óáõó»É, áñ »Ã» ³Û¹ Ï»ï»ñÇ Ñ»é³íáñáõÃÛáõÝÁ ³ÙµáÕç ÃÇí ¿, ³å³ ³Û¹ Ï»ï»ñáí ³ÝóÝáÕ áõÕÇÕÁ ½áõ·³Ñ»é ¿ ³µëóÇëÝ»ñÇ ³é³ÝóùÇÝ:
3. ABC Ï³ÝáÝ³íáñ »é³ÝÏÛ³ÝÁ Ý»ñ·Í³Í ¿ O Ï»ÝïñáÝáí ÏÇë³ßñç³Ý³·ÇÍ , áñÁ AB ¨ AC ÏáÕÙ»ñÁ ßáß³÷áõÙ ¿ M ¨ N Ï»ï»ñáõÙ: MN ³Õ»ÕÇ Ï³Ù³Û³Ï³Ý Ï»ïáí ßñç³Ý³·ÍÇÝ ï³ñí³Í ßáß³÷áÕÁ AB ¨ AC ÏáÕÙ»ñÁ Ñ³ïáõÙ ¿ P ¨ Q Ï»ï»ñáõÙ: ¸Çóáõù MN áõÕÇÕÁ OP ¨ OQ áõÕÇÕÝ»ñÇ Ñ»ï Ñ³ïíáõÙ ¿ E ¨ F Ï»ï»ñáõÙ: ²å³óáõó»É, áñ :

**ÈáõÍáõÙÝ»ñ, óáõóáõÙÝ»ñ**

1. ø³ÝÇ áñ Ñ³í³ë³ñáõÙÁ ï»ÕÇ áõÝÇ ÷á÷áË³Ï³ÝÇ Ï³Ù³Û³Ï³Ý ³ñÅ»ùÇ ¹»åùáõÙ ³å³ ³Û¹ Ñ³í³ë³ñÙ³Ý Ù»ç ï»Õ³¹ñ»Éáí Ïëï³Ý³Ýùª Ñ³í³ë³ñáõÃÛáõÝÁ, áñÁ ï»ÕÇ ÏáõÝ»Ý³ ³ÛÝ ¹»åùáõÙ, »ñµ :
2. ¸Çóáõù P(x) µ³½Ù³Ý¹³ÙÇ ·ñ³ýÇÏÇ íñ³ Ýßí³Í Ï»ï»ñÇ ³µëóÇëÝ»ñÝ »Ý x1 ¨ x2 ³ÙµáÕç Ãí»ñÁ: ²Û¹ Ï»ï»ñÇ Ñ»é³íáñáõÃÛáõÝÁ ÏÉÇÝÇª

 , áñÁ Áëï ËÝ¹ñÇ å³ÛÙ³ÝÇ

 ³ÙµáÕç ÃÇí ¿: ø³ÝÇ áñ P(x) µ³½Ù³Ý¹³ÙÁ ³ÙµáÕç ·áñÍ³ÏÇóÝ»ñáí ¿ ³å³ Ñ»ßï ¿ ÝÏ³ï»É, áñ

 , Ñ»ï¨³µ³ñ

 , ÇëÏ ¹³ Ñ³Ý³ñ³íáñ ¿ ÙÇ³ÛÝ k=0 ¹»åùáõÙ: Ð»ï¨³µ³ñ :

1. Ð»ßï ¿ ÝÏ³ï»É, áñ : ø³ÝÇ áñ Ñ»ï¨³µ³ñ EONQ ù³é³ÝÏÛ³ÝÁ Ï³ñ»ÉÇ ¿ ³ñï³·Í»É ßñç³Ý³·ÇÍ, áñÇ Ñ³Ù³ñ OQ-Ý ÏÉÇÝÇ ïñ³Ù³·ÇÍ , Ñ»ï¨³µ³ñ : Ð³Ý·áõÝáñ»Ý Ïëï³Ý³Ýù, áñ , áñï»ÕÇó ÏÑ»ï¨Ç, áñ OEF ¨ POQ »é³ÝÏÛáõÝÝ»ñÁ ÝÙ³Ý »Ý, ÁÝ¹ áñáõÙ ÝÙ³ÝáõÃÛ³Ý ·áñÍ³ÏÇóÁ Ñ³í³ë³ñ ¿ POQ ³ÝÏÛ³Ý ÏáëÇÝáõëÇÝ, Ñ»ï¨³µ³ñ :

9-րդ դասարան

1. Տրված n բնական թվի համար S(n)-ով նշանակենք n թվի թվանշանների գումարը։

Գտնել այն բոլոր բնական n թվերը, որոնց համար`

։

Պատ. Այդպիսի n բնական թիվ չկա։

**Լուծում։** Օգտվենք այն փաստից, որ յուրաքանչյուր k բնական թվի համար, S(k)-ն և k-ն 3-ի բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը։ Հետևաբար, եթե r-ով նշանակենք n-ի մնացորդը 3-ի բաժանելիս, ապա տրված հավասարման ձախ մասը բաղդատելի է nr-ի հետ ըստ 3 մոդուլի։ Այնուհետև` nrr2(mod 3), իսկ r2-ն 3-ի բաժանելիս կարող է տալ միայն 0 կամ 1 մնացորդ։ Սակայն տրված հավասարման աջ մասում գրված թիվը 3-ի բաժանելիս տալիս է 2 մնացորդ։

1. Ուսուցիչը 60 աշակերտի տրոհել է 30 զույգերի։ Հաջորդ օրը ուսուցիչը այդ աշակերտներին տրոհել է նոր զույգերի (ընդ որում որոշ զույգեր կարող են չփոխվել)։ Ապացուցել, որ երրորդ օրը հնարավոր է աշակերտներին տրոհել 30 զույգերի այնպես, որ յուրաքանչյուր զույգի երկու աշակերտները միասին զույգ կազմած չլինեն նախորդ երկու օրերին։
2. Դիցուք O-ն և O1-ը ABC սուրանկյուն եռանկյան արտագծած և ներգծած շրջանագծերի կենտրոններն են։ OO1 ուղիղը AB կողմը հատում է K կետում։ K կետից տարված են AC և BC կողմերին համապատասխանաբար KH և KE ուղղահայացներ (H-ը գտնվում է AC-ի վրա, իսկ E-ն` BC-ի)։ Ապացուցել, որ HA+KB+EC –ն հավասար է ABC եռանկյան կիսապարագծին։

Լուծում։ Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ եթե AB=c, BC=a, AC=b, իսկ p-ն ABC եռանկյան կիսապարագիծն է, ապա AB1=AC1= p-a, BC1=BA1= p-b, CA1=CB1= p-c (տես` նկ.1):

|  |  |
| --- | --- |
|  B  C1 A1   A B1 C Նկ. 1 | Դիցուք (նկ.2): Այդ դեպքում, օգտվելով Թալեսի թեորեմից, կունենանք` , ուստի`HA=AB1-HB1= AB1-MB1== AB1-= : Նույն ձևով, կարելի է ցույց տալ, որ *,*:Գումարելով ստացված հավասարությունները կունենանք`  |

 B

 K

 O O1

A H M B1  C

 Նկ.2

8-րդ դասարան

1. Դիցուք n-ը բնական թիվ է։ Նշանակենք A(n)-ով այն բոլոր տարակողմ եռանկյունների քանակը, որոնց կողմերի երկարությունները բնական թվեր են և մեծ չեն n+3-ից։ Նշանակենք B(n)-ով այն բոլոր եռանկյունների քանակը, որոնց կողմերի երկարությունները բնական թվեր են և մեծ չեն n-ից։ Համեմատել A(n)-ը B(n)-ի հետ։

**Պատ.** A(n)=B(n)։

**Լուծում։** Դիցուք a, b, c-ն այնպիսի բնական թվեր են, որ a≤b≤c≤n և c<a+b։ Այդ դեպքում a+1, b+2 և c+3 թվերը մեծ չեն n+3-ից և բավարարում են եռանկյան անհավասարությանը։ Հետևաբար` B(n)≤A(n)։

Այժմ, եթե x,y,z բնական թվերը բավարարում են եռանկյան անհավասարությանը և x<y<z≤n+3, ապա x-1≤y-2≤z-3≤n թվերը նույնպես կբավարարեն եռանկյան անհավասարությանը։ Հետևաբար` A(n)≤B(n)։

1. Ուսուցիչը 60 աշակերտի տրոհել է 30 զույգերի։ Հաջորդ օրը ուսուցիչը այդ աշակերտներին տրոհել է նոր զույգերի (ընդ որում որոշ զույգեր կարող են չփոխվել)։ Ապացուցել, որ երրորդ օրը հնարավոր է աշակերտներին տրոհել 30 զույգերի այնպես, որ յուրաքանչյուր զույգի երկու աշակերտները միասին զույգ կազմած չլինեն նախորդ երկու օրերին։

**Լուծում։** Այն փաստը, որ A և B աշակերտները կազմել են զույգ առաջին երկու օրերից մեկում կգրառենք հետևյալ կերպ` : Աշակերտներին կարելի է տրոհել խմբերի այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբում ցանկացած երկու C և D աշակերտների համար գոյություն ունենան աշակերտներ այնպես, որ Ընդ որում այդ տրոհումը կարելի է կատարել այնպես, որ ցանկացած երկու տարբեր խմբերից ընտրված C և D աշակերտների համար` C D։

Դիցուք n-ը ստացված խմբերի թիվն է, իսկ -ը այդ խմբերի աշակերտների քանակներն են (կարող ենք համարել, որ )։ Քանի որ , ապա թվերի մեջ կենտ թվերի քանակը զույգ է։

Եթե նշված խմբերի մեջ կան առնվազն երկուսը, որոնցից յուրաքանչյուրում կա 2 աշակերտ, ապա ակնհայտորեն կարող ենք այդ խմբերի աշակերտներից կազմել զույգեր, որոնք առաջին երկու օրերին չեն եղել։ Իսկ եթե r1=2, r2>2 , ապա առաջին խումբը կվերցնենք մեկ այլ զույգ քանակով խմբի հետ և կկազմենք զույգեր որոնք նախորդ օրերին չեն եղել (եթե բացի առաջին խմբից, մնացած բոլոր խմբերի քանակները կենտ են, ապա առաջին խումբը կվերցնենք երկու հատ կենտ քանակ ունեցող խմբի հետ)։ Արդյունքում կմնան զույգ քանակով աշակերտներ, որոնցում բոլոր խմբերը պարունակում են 2-ից ավելի աշակերտներ։ Նկատենք, որ առնվազն 4 աշակերտ պարունակող յուրաքանչյուր զույգ խմբի մեջ կարելի է կազմել նոր զույգեր (եթե , ապա կլինեն նոր զույգեր)։

Այսպիսով, կմնան զույգ քանակով կենտ խմբեր։ Հեշտ է ստուգել, որ երկու հատ կենտ քանակով աշակերտներ պարունակող խմբերից կարելի է կազմել նոր խմբեր։

1. ABC եռանկյան մեջ` A=3 Իսկ D կետը նշված է BC կողմի վրա այնպես, որ ADC= 2C: Ապացուցել, որ AB+AD=BC:

**Լուծում։** BA հատվածի շարունակության վրա տեղադրենք E կետն այնպես, որ AE=AD։ Քանի որ ADC= 2C, ապա DAC=180°-3C=CAE։ Հետևաբար , որտեղից կունենանք` , ուստի` BC=BE=BA+AD:

 B

 D

 A C

 E