

Մաթեմատիկա 9-րդ դասարան
Մարզային Փուլ 2026թ.
Տևողությունը - 3 ժամ

Խնդիր 1. Դիցուք a -ն, b -ն և c -ն դրական ամբողջ թվեր են այնպես, որ $a + b + c = 999$, և $6a > 3b > 2c$: Գտնել $a + 2b + 3c$ արտահայտության հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում. Պարզ է, որ եթե a, b, c եռյակում a -ն փոքրացնենք 1-ով, և b, c թվերից մեկը մեծացնենք 1-ով, ապա թվերի գումարը չի փոխվի, բայց $a + 2b + 3c$ արտահայտության արժեքը կմեծանա: Նույն կերպ, եթե c -ն մեծացնենք 1-ով, և a, b թվերից մեկը փոքրացնենք 1-ով, կունենանք նույն արդյունքը: Այսպիսով, որպեսզի $a + 2b + 3c$ -ն ընդունի հնարավոր մեծագույն արժեքը, պետք է c -ն լինի հնարավորինս մեծ, իսկ a -ն՝ հնարավորինս փոքր:

$$6a = a + 2a + 3a > a + b + c = 999$$

հետևաբար $a > 166.5$: Այսպիսով, a -ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը 167-ն է: Տեղադրենք $a = 167$: Կստացվի, որ $b + c = 999 - 167 = 832$: Քանի որ $1.5b > c$, հետևաբար $2.5b > b + c = 832$, ուստի $b > 332$: Ստացվեց, որ b -ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը 333-ն է, հետևաբար c -ի հնարավոր մեծագույն արժեքը կլինի $832 - 333 = 499$: Տեղադրելով, կստանանք ստացված արժեքները բավարարում են $6a > 3b > 2c$ անհավասարությանը:

Այսպիսով $a + 2b + 3c \leq 167 + 2 \cdot 333 + 3 \cdot 499 = 2330$:

Պատասխան՝ 2330:

Խնդիր 2. Գտնել p, q պարզ թվերի բոլոր հնարավոր գույգերը, եթե $p^3 + q^3 + 1$ -ը բաժանվում է pq -ի, և $q < \sqrt{2p} + 1$:

Լուծում. Եթե $p = 2$, ապա $q < 3$, որի դեպքում պայմանին բավարարող p, q թվագույգեր չկան:

Եթե $p = 3$, ապա $q < \sqrt{6} + 1 < 4$, ուստի $q = 2$ կամ $q = 3$: Ստուգելով կրեսնենք, որ բավարարում է միայն $q = 2$ դեպքը:

Դիտարկենք $p > 3$ դեպքը: Ցույց տանք, որ $\sqrt{2p} + 1 < p$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2p} &< p-1 \\ 2p &< (p-1)^2 \\ 0 &< p^2 - 4p + 1 \\ 0 &< (p-2)^2 - 3\end{aligned}$$

որն էլ ճիշտ է $p > 3$ ցանկացած բնական թվի դեպքում:

$p^3 + q^3 + 1 \vdots pq$, հետևաբար $q^3 + 1 \vdots p$: Վերլուծելով արտադրիչների կտրամանք, որ $(q+1)(q^2 - q + 1) \vdots p$: Քանի որ $q < \sqrt{2p} + 1 < p$, ուստի $q+1 \leq p$, բայց քանի որ p, q թվերը պարզ են, և $p > 3$, կարող ենք ասել, որ $q+1 < p$: Քանի որ p -ն պարզ է, հետևաբար $q^2 - q + 1 \vdots p$: Մյուս կողմից $q^2 - q + 1 = (q-1)^2 + q < 2p + q < 3p$: Ստացվում է, որ $q^2 - q + 1 = p$ կամ $q^2 - q + 1 = 2p$: Երկրորդ դեպքն անհնար է, քանի որ $q^2 - q + 1$ -ը կենար թիվ է: Այսպիսով, $q^2 - q + 1 = p$, հետևաբար $p-1 \vdots q$: Այստեղից բխում է, որ $p^3 - 1 \vdots q$, բայց մյուս կողմից $p^3 + 1 \vdots q$: Նամաբեղելով վերջին երկու արդյունքը ստանում ենք, որ $q = 2$: $q^3 + 1 = 9$, որի $p > 5$ պարզ բաժանարար չունի, ուստի այս դեպքում լուծում չկա:

Պատասխան՝ $p = 3, q = 2$:

Խնդիր 3. Դիցուք O -ն ω շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ A, B, C կետերը գտնվում են ω շրջանագծի վրա, ընդ որում, AB -ն տրամագիծ է: Դիցուք D -ն C կետի համաչափն է AB ուղղի նկատմամբ: AOC եռանկյան A կետից փարված միջնագիծը ω շրջանագիծը երկրորդ անգամ հատում է K կետում: Ապացուցել, որ DK ուղիղը անցնում է BC հատվածի միջնակետով:

Լուծում. Նշանակենք $M = AK \cap OC$, և $N = DK \cap BC$: Քանի որ D և C կետերը համաչափ են AB -ի նկատմամբ, հետևաբար $\angle ABD = \angle ABC$: $OC = OB$, ուստի $\angle OCB = \angle OBC = \angle ABD = \angle AKD$: Ստացանք, որ $\angle MKN = \angle MCN$, որտեղից բխում է, որ M, C, K, N կետերը գտնվում են նույն շրջանագծի վրա:

$$\angle OCB = \angle OBC = \angle AKC = \angle MNC,$$

հետևաբար $MN = NC = NO$, ինչը նշանակում է, որ $\triangle ONC$ -ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, այսինքն $ON \perp BC$: Քանի որ O -ն ω -ի կենտրոնն է, իսկ BC -ն լար է, հետևաբար N -ը BC -ի միջնակետն է:

Խնդիր 4. Թղթի վրա գրված են $1, 2, \dots, 2026$ թվերը: Անին ունի 100 փաթեթ գույների մատիվներ: Ամենաշատը քանի՞ թիվ կարող է ներկել Անին այնպես, որ կամայական երկու փաթեթ գույներով ներկված թվերի գումարը չբաժանվի 5-ի, իսկ կամայական երկու նույն գույներով ներկված թվերի փաթեթությունը բաժանվի 7-ի:

Լուծում. 1, 2, ..., 2026 թվերը բաժանենք խմբերի հետևյալ կերպ:

$$A_1 = \{1, 2, \dots, 35\}$$

$$A_2 = \{36, 37, \dots, 70\}$$

$\vdots$

$$A_{57} = \{1961, 1962, \dots, 1995\}$$

$$A_{58} = \{1996, 1997, \dots, 2026\}$$

Բոլոր խմբերը բացի վերջինից բաղկացած են հաջորդական 35 թվերից:

Դիցուք a և b թվերը նույն խմբից են, ներկված են և բաժանվում են 5-ի: Քանի

որ $a + b \vdots 5$, հետևաբար դրանք ներկված են նույն գույնով: Մյուս կողմից, քանի որ թվերը նույն գույնի են, հետևաբար $a - b$ -ն պետք է բաժանվի 7-ի: Ստացվում

է, որ $a - b \vdots 35$, որն անհնար է, քանի որ $|a - b| < 35$: Այսպիսով, յուրաքանչյուր խմբում հնարավոր է ներկել առավելագույնը մեկ 5-ի բաժանվող թիվ:

Այժմ գրենք նույն խմբից 5-ի չբաժանվող թվերի հնարավոր մեծագույն քանակը, որոնք հնարավոր է ներկել:

Դիտարկենք նույն խմբում գրնվող $5k + 1$ և $5k + 4$ տեսքի թվերը: Յուրաքանչյուր, որ այս թվերից առավելագույնը հնարավոր է ներկել 7 թիվ, ընդ որում, դրանք կան բոլոր $5k + 1$ տեսքի թվերն են, կան բոլոր $5k + 4$ տեսքի թվերը: Դիցուք ներկել ենք a, b թվերը, որտեղ a -ն $5k + 1$ տեսքի է, իսկ b -ն՝ $5k + 4$ տեսքի: Պարզ է,

որ $a + b \vdots 5$, ուստի ներկելու միակ եղանակն այն է, որ թվերը լինեն նույն գույնի: Այժմ վերցնենք նույն խմբից այնպիսի c թիվ, որը $5k + 1$ կամ $5k + 4$ տեսքի է, և ներկենք: Պարզ է, որ $a + c$ կամ $b + c$ թվերից ինչ-որ մեկը բաժանվում է 5:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ $a + c \vdots 5$: Սա նշանակում է, որ a և c թվերը նույն գույնի են: Այսպիսով, a, b, c թվերը ներկված են նույն գույնով, հետևաբար ցանկացած երկուսի փոխարկությունը բաժանվում է 7-ի: Մյուս կողմից,

եթե $a + c$ և $a + b$ թվերը բաժանվում են 5-ի, ապա $b - c \vdots 5$: Ստացվում է, որ $b - c \vdots 35$: Բայց սա հնարավոր չէ, քանի որ b և c թվերը նույն խմբից են, այսինքն $|b - c| < 35$: Ստացվեց, որ կարող ենք ներկել կամ $5k + 1$ և $5k + 4$ տեսքի մեկական թիվ, կամ $5k + 1$ և $5k - 1$ տեսքից ինչ-որ մեկը և ներկենք բոլորը:

Նույն բանը կարող ենք ասել $5k + 2$ և $5k + 3$ տեսքի թվերի մասին: Այսպիսով, նույն խմբից կարող ենք վերցնել առավելագույնը 14 հար 5-ի չբաժանվող թիվ:

Վերցնենք մի խմբում բոլոր $5k + 1$ և $5k + 2$ տեսքի թվերը: Յուրաքանչյուր տեսքից կա 7-ական թիվ, ուստի դրանց քանակը կլինի 14: Քանի որ ոչ մի երկուսի գումարը 5-ի չի բաժանվում, այդ թվերը կարող ենք ներկել իրարից փոքրեր գույներով:

Դիցուք a, b թվերը ներկված են բավարարելով խնդրի պայմաններին: Դիտարկենք $x = a + 35k$ թիվը, որտեղ k -ն որևէ ամբողջ թիվ է: x թիվը ներկենք a թվի

գույնով: Պարզ է, որ $x - a \vdots 7$: Մյուս կողմից, x և b թվերի գույները բավարարում են խնդրի պայմաններին, քանի որ a և b թվերի գույները բավարարում են, իսկ x -ը ներկված է a թվի գույնով: Այսպիսով, վերցնենք առաջին խմբի 15 թիվ (14 թիվ 5-ի չբաժանվող, և 1 թիվ 5-ի բաժանվող), ներկենք 15 իրարից փոքրեր գույներով: Այնուհետև յուրաքանչյուր թվին գումարելով 35, կստանանք երկրորդ

խմբի թվեր, որոնք կներկենք համապատասխան գույներով և այդպես շարունակ, մինչև նախավերջին խումբը: Վերջին խմբում առկա է 31 թիվ՝ 7 հապ $5k + 1$ տեսքի, և 6-ական մնացած տեսքերից: Այսպիսով, յուրաքանչյուր խմբում ներկված կլինի 15 թիվ, իսկ վերջինում առավելագույնը կարող ենք ներկել 7 հապ $5k + 1$ տեսքի թիվ, 6 հապ $5k + 2$ տեսքի թիվ, և 1 հապ 5-ի բաժանվող թիվ (5-ի բաժանվող թվերը կարող ենք վերցնել $35k + 5$ տեսքի թվերը, որ վերջին խմբում հնարավոր լինի ընտրել): Այսպիսով, կլինի $57 \cdot 15 + 14 = 869$ թիվ:

Պատասխան՝ 869: