Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի դպրոցական փուլ 2025-2026 ուստարի
9-րդ դասարան
Տևողությունը - 2 ժամ 30 րոպե
Լուծումներ

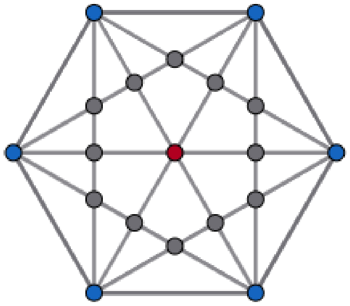
1. Հաշվե՛ք $\frac{2^{n+4}-2(2^n)}{2(2^{n+3})}$ արտահայտության արժեքը (n-ը բնական թիվ է).

1) $2^{n+1}-\frac{1}{8}$ 2) $1-2^n$ 3) $\frac{7}{8}$ 4) $\frac{7}{4}$

Լուծում. $\frac{2^{n+4}-2(2^n)}{2(2^{n+3})}=\frac{2^{n+4}-2^{n+1}}{2^{n+4}}=\frac{2^{n+4}}{2^{n+4}}-\frac{2^{n+1}}{2^{n+4}}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$:

2. Հայկը գծեց կանոնավոր վեցանկյուն, տարավ դրա բոլոր անկյունագծերը և նշեց դրանց բոլոր հատման կետերը: Քանի՞ կետ նա նշեց վեցանկյան ներսում (վեցանկյան գագաթը հատման կետ չենք համարում):

1) 12 2) 13 3) 14 4) 15



Լուծում. Գծելով կանոնավոր վեցանկյան բոլոր անկյունագծերը, կտեսնենք, որ դրանցից 3-ը հատվում են մի կետում, իսկ մնացած բոլոր զույգերը հատվում են տարբեր կետերում: Հաշվելով կստանանք 13:

Լուծման երկրորդ եղանակ. Գագաթների ցանկացած քառյակից առաջանում է անկյունագծերի հատման մեկ կետ: Քառյակների քանակը $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15$ է, սակայն 3 հիմնական անկյունագծերի հատման կետը հաշված ենք լինում 3 անգամ, ուստի պետք է հանենք 2՝ 15-2=13:

3. 18-ից մինչև 93 բոլոր երկնիշ թվերն իրար կողք գրելով ստացել են $N=18192021\ldots919293$ թիվը: Դիցուք k-ն մեծագույն թիվն է, որ N-ը բաժանվում է 3^k-ի: Գտե՛ք k-ն:

1) 0 2) 1 3) 2 4) այլ պատասխան

Լուծում. Քանի որ 3-ի և 9-ի բաժանելիությունը որոշվում են թվանշանների գումարով՝ հաշվենք թվանշանների գումարը և ստուգենք արդյո՞ք այն բաժանվում է 9-ի: Դիտարկենք 202122…29 կտորը: Այս կտորինը հավասար է $10\cdot2+(0+1+2+\ldots+9)=10\cdot2+45$: Այս տրամաբանությամբ հաշվենք տրված թվի թվանշանների գումարը.

$1+8+1+9+10\cdot2\;+\;45\;+\;10\cdot3+45\;+\ldots+10\cdot8+45+$
$+9+0+9+1+9+2+9+3$, քանի որ 45-ը բաժանվում է 9-ի, այն կարող ենք անտեսել, ինչպես նաև բոլոր 9-երը: Դրանք անտեսելուց հետո մնում է $1+8+1+10\cdot(2+3+\ldots+8)+1+2+3=10+350+6=366$, որը չի բաժանվում 9-ի, սակայն բաժանվում է 3-ի: Ուրեմն մեր թիվը նույնպես բաժանվում է 3-ի և չի բաժանվում 9-ի, ուստի $k=1$:

4. Գտե՛ք այնպիսի k բնական թվերի քանակը, որոնց համար x-ից կախված $kx-12=3k$ հավասարումն ունի ամբողջ լուծում.

1) 4 2) 5 3) 6 4) այլ պատասխան

Լուծում. Լուծենք ըստ x-ի. $x=\frac{3k+12}{k}=3+\frac{12}{k}$, որը պետք է լինի ամբողջ թիվ, այսինքն $12\,\vdots\,k$, ուստի k-ն կարող է լինել $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$:

5. Գրատախտակին գրված է թվերի հետևյալ շարքը (n թիվը գրված է n անգամ).

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, …

Գտե՛ք 2025-րդ անդամի 5-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Լուծում. Նախ պարզենք, թե ինչ թիվ է գրված 2025-րդ դիրքում: 1-ից մինչև n թիվը պարունակող շարքը կազմված է $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ հատ թվից: Պետք է գտնենք, թե ո՞ր n-ի համար է $\frac{n(n+1)}{2} < 2025 < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$: Քանի որ 2025-ը մոտ է 2048-ին, որը $2^{11} = 64 \cdot 32$-ն է, ստուգումով կարող ենք համոզվել, որ $n = 63$: Ուրեմն 2025-րդ դիրքում գրված է 64 թիվը, որի մնացորդը 4 է:

6. Արմենը հաշվեց գրեց $1^2, 2^2, 3^2, ..., 100^2$ թվերի արժեքները: Դրանցից քանիսի՞ տասնավորի դիրքում գրված թվանշանն է կենտ:

1) 10 2) 20 3) 30 4) 40

Լուծում. Դիտարկենք $\overline{ab}$ երկնիշ թվի քառակուսին:

$\overline{ab}^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$

Ստացված արժեքի տասնավորի դիրքում գրված թվանշանի զույգությունը որոշվելու է միայն b^2-ու միջոցով, քանի որ $100a^2$-ն և $20ab$-ն չեն ազդում տասնավորի զույգության վրա: Ստացվում է, որ հաշվելով միանիշների մոտ կենտ տասնավոր ունեցող թվերի քանակը, կստանանք ցանկացած տասնյակում այդպիսի թվերի քանակը: Ստուգելով կարող ենք տեսնել, որ միայն $4^2 = 16$ և $6^2 = 36$ դեպքերում է տասնավորում կենտ, այսինքն ամեն տասնյակում 2 այդպիսի թիվ կա: Քանի որ ունենք 10 հատ տասնյակ, ամենքում 2 այդպիսի թիվ, ուրեմն ընդհանուրը ստացվում է $10 \cdot 2 = 20$ թիվ:

7. Դիցուք $a^x = c^q$ և $c^y = a^z$, որտեղ a, c, x, q, y, z թվերը մեկից մեծ բնական թվեր են: Եզրակացություններից ո՞րն է ճիշտ.

1) $xy = qz$ 2) $\frac{x}{y} = \frac{q}{z}$ 3) $x + y = q + z$ 4) $x + z = q + y$

Լուծում. Առաջին հավասարության երկու կողմերը y աստիճան բարձրացնելով ստանում ենք $a^{xy} = c^{qy}$, երկրորդ հավասարության երկու կողմերը q աստիճան բարձրացնելով ստանում ենք $c^{yq} = a^{zq}$: Համադրելով ստացված երկու հավասարությունները, ունենում ենք $a^{xy} = c^{yq} = a^{zq}$, որտեղից $xy = zq$:

8. Ժամը կանվանենք համաչափ, եթե դրա թվանշանները ձախից և աջից նույն ձև են կարդացվում: Օրինակ՝ 1:31, 4:44, 11:11: Պարզե՛ք, թե կես օրվա ընթացքում (0:00-ից մինչև 11:59) քանի՞ տարբեր համաչափ ժամ կերևա:

1) 62 2) 52 3) 56 4) 47

Լուծում. Մինչև 10:00 եղած համաչափ ժամերն ունեն $a: ba$ տեսքը, որտեղ a-ն 0-ից 9 որևէ թիվ է, իսկ b-ն՝ 0-ից 5: Այդպիսի համաչափ ժամերի քանակը ստացվում է $10 \cdot 6 = 60$: Իսկ 10:00-ից հետո կա ընդամենը 2 համաչափ ժամ՝ 10: 01 և 11: 11: Ընդհանուր ստացվում է $60 + 2 = 62$ տարբերակ:

9. 10 գնդակներ համարակալված են 1-ից 10 թվերով և լցված են արկղի մեջ: Դավիթը արկղից պատահականորեն վերցնում է որևէ գնդակ, որից հետո Նարեն պատահականորեն վերցնում է մեկ այլ գնդակ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ նրանց վերցրած գնդակների համարների գումարը զույգ է:

1) $\frac{4}{9}$ 2) $\frac{9}{19}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{5}{9}$

Լուծում. Մինչև Դավիթի վերցնելը կար 5 կենտ և 5 զույգ համարով գնդակ: Որպեսզի երկու վերցրված գնդակների համարների գումարը լինի զույգ, պետք է կա՛մ երկուսն էլ լինեն զույգ, կա՛մ երկուսն էլ լինեն կենտ: Դավիթի վերցնելուց հետո Նարեն պետք է վերցնի նույն զույգությունն ունեցող համարով գնդակ, որոնց քանակը 4 է, իսկ մնացած բոլոր գնդակների քանակը՝ 9, ուստի հավանականությունը $\frac{4}{9}$ է:

10. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 3×3 տախտակի վրա դնել մեկական սև և սպիտակ շախմատի ձիեր այնպես, որ դրանք միմյանց չհարվածեն:

1) 16 2) 40 3) 56 4) 64

Լուծում. Սպիտակ ձին կարող է լինել կա՛մ կենտրոնական վանդակում, կա՛մ եզրային 8 վանդակներից որևէ մեկում: Եթե այն կենտրոնում է, ապա սև ձին կարող է լինել մնացած 8 վանդակներից ցանկացածում՝ 8 եղանակ: Իսկ եթե սպիտակը եզրային 8 վանդակներից որևէ մեկում է, ապա սև ձին կարող է լինել սպիտակի չհարվածած և չկանգնած դիրքերից ցանկացածում՝ 6 տեղ, ստացվում է $8 \cdot 6 = 48$ եղանակ: Ընդհանուր եղանակների քանակը այս երկու դեպքերի գումարն է՝ $8 + 48 = 56$:

11. Դիցուք $\frac{x^2-bx}{ax-c} = \frac{m-1}{m+1}$ x-ից կախված հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր լուծում, որոնք իրար հակադիր թվեր են: Այդ դեպքում m-ը հավասար է.

1) $\frac{a-b}{a+b}$ 2) $\frac{a+b}{a-b}$ 3) $\frac{1}{c}$ 4) 1

Լուծում. Խաչաձև բազմապատկելով ստանում ենք

$(m + 1)x^2 - (bm + am + b - a)x + c(m - 1) = 0$ քառակուսի հավասարումը: Քանի որ այն ունի երկու հակադիր լուծում, ուրեմն գագաթի աբսցիսը 0 է, այսինքն $\frac{bm+am+b-a}{2(m+1)} = 0$, որտեղից $m(a + b) = a - b$, այսինքն $m = \frac{a-b}{a+b}$:

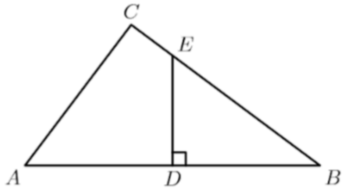
12. Դիցուք $y = mx + b$ ուղիղը $x - 3y + 11 = 0$ ուղղի համաչափն է x-երի առանցքի նկատմամբ: Գտե՛ք $m + b$-ի արժեքը:

1) -6 2) -5 3) -4 4) -3

Լուծում. $x - 3y + 11 = 0$-ն ձևափոխելով ստանում ենք $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$: Երբ կառուցում ենք x-երի առանցքի նկատմամբ համաչափը, x-երի առանցքի հետ հատման կետը չի փոխվում, իսկ y-ների առանցքի հետ հատման կետը փոխում է նշանը, անկյունային գործակիցը նույնպես փոխում է նշանը: Այսպիսով ստացվում է $y =-\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$ ուղիղը, որի համար $m + b =-\frac{1}{3} - \frac{11}{3} =-4$:

13. Նկարում՝ $\angle C = 90^\circ$, $AD = DB$, $DE \perp AB$, $AB = 20$, $AC = 12$: Գտե՛ք $ADEC$ քառանկյան մակերեսը:

1) 75 2) $58\frac{1}{2}$ 3) $37\frac{1}{2}$ 4) այլ պատասխան



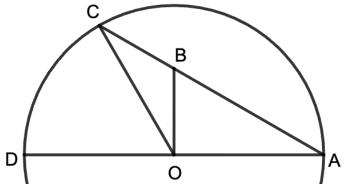
Լուծում. $DB = \frac{AB}{2} = 10$: $BC = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$

$\triangle DBE \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{10}{16}\right)^2 = \frac{25}{64}$

$S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{BDE} = \frac{16\cdot12}{2} - \frac{16\cdot12}{2} \cdot \frac{25}{64} = 96 \cdot \frac{36}{64} = 58\frac{1}{2}$

14. Դիցուք d-ն n^3 բնական թվի բաժանարարների քանակն է:
Ինչի՞ կարող է հավասար լինել d-ն.
1) 200 2) 201 3) 202 4) 203
Լուծում. Դիցուք $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, այդ դեպքում $n^3 = p_1^{3\alpha_1} \cdot p_2^{3\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{3\alpha_k}$, ուստի ցանկացած բաժանարար ունի $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_k^{\beta_k}$ տեսքը, որտեղ $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, ուստի բաժանարարները քանակը հավասար է $d = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1)... (3\alpha_k + 1)$, որը 3-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ: Պատասխաններից միայն 202-ն է 3-ի բաժանելիս տալիս 1 մնացորդ, ուստի միակ հնարավոր տարբերակը դա է:

15. Նկարում տրված է O կենտրոնով շրջանագիծը, որում տարված է AD տրամագիծը:
C կետն ընտրված է շրջանագծի վրա այնպես, որ $\angle COD = 60°$,
իսկ B կետը՝ AC հատվածի վրա այնպես, որ $\angle OBA = 60°$:
Հայտնի է, որ $OB = 5$: Գտե՛ք BC հատվածի երկարությունը:
1) 3 2) $3\sqrt{3}$ 3) $3 + \sqrt{3}$ 4) 5



Լուծում. $CO = OA \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$: Որպես արտաքին անկյուն
$60° = \angle COD = \angle OCA + \angle OAC \Rightarrow \angle OCA = 30°$: Որպես արտաքին անկյուն
$60° = \angle OBA = \angle BCO + \angle BOC = 30° + \angle BOC \Rightarrow \angle BOC = 60° - 30° = 30° \Rightarrow$
$\Rightarrow CB = BO = 5$:

16. Դիցուք S-ը $\{1, 2, 3, 4, ..., 50\}$ բազմության այնպիսի ենթաբազմություն է, որ S-ի տարրերից ոչ մի երկուսի գումարը չի բաժանվում 7-ի: Գտե՛ք S-ի տարրերի հնարավոր առավելագույն քանակը:
Լուծում. Եթե S-ի մեջ կա 7-ի բաժանելիս r մնացորդ տվող թիվ, ապա չի կարող լինել $7 - r$ մնացորդ տվող թիվ: Մնացորդները բաժանենք հետևյալ զույգերին.
$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$: Ամեն զույգից մի տեսակի թիվ կարող է լինել S-ում, ինչպես նաև ընդամենը 1 թիվ, որն անմնացորդ բաժանվում է 7-ի: $\{1, 2, 3, 4, ..., 50\}$ բազմության մեջ 1 մնացորդ տվող թվերի քանակը 8 է, իսկ մնացածները՝ 7-ական: Այսպիսով կարող ենք վերցնել առավելագույնը $8 + 7 + 7 + 1 = 23$ հատ թիվ: Օրինակ. $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$ տեսքի բոլոր թվերը և 7-ը:
Պատասխան՝ 23

17. 6-անիշ թիվը կանվանենք գեղեցիկ, եթե այն կազմված է 1-ից 6 բոլոր թվանշաններից, և ցանկացած $1 \le k \le 6$ թվի համար առաջին k թվանշաններով կազմված թիվը բաժանվում է k-ի: Քանի՞ 6-անիշ գեղեցիկ թիվ կա:
Լուծում. Քանի որ առաջին 2 թվանշաններով գրված թիվը պետք է բաժանվի 2-ի, ուրեմն 2-րդ թվանշանը զույգ է: Նույն տրամաբանությամբ զույգ են նաև 4-րդ և 6-րդ թվանշանները: Այսինքն 2-րդ, 4-րդ և 6-րդ դիրքերում գրված են հենց 2, 4, 6 թվանշանները որևէ հերթականությամբ: Քանի որ առաջին 5 թվանշաններով գրված թիվը պետք է բաժանվի 5-ի, ուրեմն 5-րդ դիրքում գրված է հենց 5 թվանշանը: Սա նշանակում է, որ 1-ին և 3-րդ դիրքերում գրված են 1 և 3 թվանշանները որևէ հերթականությամբ: Քանի որ առաջին երեք թվանշաններով գրված թիվը պետք է բաժանվի 3-ի, ուրեմն առաջին 3 թվանշանների գումարը պետք է բաժանվի 3-ի, և քանի որ դրանց մեջ են 1-ն ու 3-ը, իսկ մյուս պետք է լինի 2, 4, 6 թվերից որևէ մեկը, ապա միակ հնարավոր տարբերակը 2-ն է: Քանի որ առաջին չորս թվանշաններով գրված թիվը

բաժանվում է 4-ի, ուրեմն 3-րդ և 4-րդ թվանշաններով գրված երկնիշ թիվը բաժանվում է 4-ի, ընդ որում 3-րդ դիրքում կամ 1 է կամ 3, իսկ չորրորդ դիրքում կամ 4 կամ 6: 14-ը և 34-ը չեն բաժանվում 4-ի, իսկ 16-ն ու 36-ը բաժանվում են, ուստի 4-րդ դիրքում միարժեքորեն գրված է 6: Այսպիսով ստացանք, որ գեղեցիկ թվերն ունեն հետևյալ տեսքը. *2*654, որտեղ աստղանիշների փոխարեն գրված են 1 և 3 թվանշանները, ընդ որում, երկուսն էլ բավարարում են: Այսինքն կա 2 գեղեցիկ թիվ՝ 123654 և 321654:

Պատասխան՝ 2

18. S բազմության համար $|S|$-ը ցույց է տալիս այդ բազմության տարրերի քանակը, իսկ $n(S)$-ը՝ բոլոր ենթաբազմությունների քանակը: Դիցուք A, B, C բազմություններն այնպիսինն են, որ $|A| = |B| = 100$ և $n(A) + n(B) + n(C) = n(A \cup B \cup C)$: Գտե՛ք $|A \cap B \cap C|$-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը:

Լուծում. Գիտենք, որ m տարր ունեցող բազմության ենթաբազմությունների քանակը 2^m է, ուրեմն $n(S) = 2^{|S|}$: Քանի որ $|A| = |B| = 100$, ուրեմն

$n(A) + n(B) + n(C) = 2^{100} + 2^{100} + 2^{|C|} = 2^{|A \cup B \cup C|}$: Այստեղից հետևում է, որ $|C| = 101$ և $|A \cup B \cup C| = 102$: Դիցուք $A \cup B \cup C = \{s_1, s_2, .., s_{102}\}$ և $A = \{s_1, s_2, ..., s_{100}\}$: Որպեսզի $|A \cap B \cap C|$-ն լինի հնարավոր փոքրագույնը, պետք է $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ և $|B \cap C|$-ի արժեքները լինեն հնարավոր փոքրագույնը, որոնք հետևյալն են

$|A \cap B| = 98$, $|A \cap C| = 99$, $|B \cap C| = 99$: Օրինակ.

$B = \{s_3, s_4, ..., s_{102}\}$, $C = \{s_1, s_2, s_4, s_5, ..., s_{102}\}$: Այսպիսով $A \cap B \cap C = \{s_4, s_5, ..., s_{100}\}$, ուստի $|A \cap B \cap C| = 97$:

Պատասխան՝ 97

19. Հաշվե՛ք $\{a, b, c\}$ իրարից տարբեր բնական թվերից կազմված բազմությունների քանակը, որոնց համար $a \cdot b \cdot c = 2310$:

Լուծում. $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$: Պետք է այս պարզ արտադրիչները բաշխել a, b, c թվերի միջև: Քանի որ պետք է գտնել բազմությունների քանակը, իսկ բազմության մեջ տարրերի հերթականությունը կարևոր չէ, կարող ենք առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրել, որ 2 արտադրիչը a-ի մեջ է: Այժմ պետք է մնացած 4 պարզ արտադրիչները բաշխել a, b, c թվերի միջև: Դա անելու համար կա 3^4 եղանակ, սակայն պետք է հանել այն դեպքը, երբ բոլոր արտադրիչները a-ի մեջ են, քանի որ այդ դեպքում կստացվեր $b = c = 1$: Ստացանք $3^4 - 1$, որը պետք է բաժանել 2-ի, որպեսզի b-ի և c-ի տեղերը փոխելիս ստացված երկու նույն դեպքերը հաշվենք մեկ անգամ (օրինակ $\{2, 15, 77\}$ և $\{2, 77, 15\}$): Այսպիսով վերջնական պատասխանն է $\frac{3^4-1}{2} = 40$:

Պատասխան՝ 40

20. $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ թվային հաջորդականության համար սահմանենք $T(A) = \frac{S_1+S_2+...+S_n}{n}$, որտեղ $S_k = a_1 + a_2 +... + a_k$ ցանկացած $1 \le k \le n$-ի համար: Դիցուք $A = (a_1, a_2, ..., a_{99})$, $B = (1, a_1, a_2, ..., a_{99})$ և $T(A) = 1000$: Գտե՛ք $T(B)$-ն:

Լուծում. $T(A) = \frac{a_1+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+...+(a_1+a_2+...+a_{99})}{99} = 1000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 99 \cdot T(A) = a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) +... + (a_1 + a_2 +... + a_{99}) = 99000$:

$T(B) = \frac{1+(1+a_1)+(1+a_1+a_2)+(1+a_1+a_2+a_3)+...+(1+a_1+a_2+...+a_{99})}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 \cdot T(B) = 1 + (1 + a_1) + (1 + a_1 + a_2) + (1 + a_1 + a_2 + a_3) + ... + (1 + a_1 + a_2 + ... + a_{99}) =$

$= 99 \cdot T(A) + 100 \cdot 1 = 99000 + 100 = 99100 \Rightarrow T(B) = \frac{99100}{100} = 991$:

Պատասխան՝ 991