Լուծումներ
9-րդ դասարան

Խնդիր 1.
Լուծում. Անհավասարության ձախը մասը բերենք ընդհանուր հայտարարի՝

$$\frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{2}{1+ab} :$$

Քանի որ հայտարարում եղած բոլոր արտադրիչները դրական են, կարող ենք անհավասարության երկու կողմերը բազմապատկել այդ արտադրիչներով առանց անհավասարության նշանը փոխելու՝

$$(1+ab)(2+a^2+b^2) \leq 2(1+a^2)(1+b^2) :$$

Բացելով փակագծերը և բոլոր գումարելիները տեղափոխելով աջ ստանում ենք՝

$$2ab+a^3b+ab^3-a^2-b^2-2a^2b^2 \leq 0 :$$

Կատարելով նույնական ձևափոխություններ՝ անհավասարության ձախ մասը վերլուծենք արտադրիչների.

$$ab(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=(ab-1)(a-b)^2 \leq 0 :$$

Որպեսզի ապացուցենք անհավասարությունը, բավարար է ցույց տալ, որ $ab < 1$: Օգտվելով Կոշիի անհավասարությունից կունենանք՝

$$2 > a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

հետևաբար $1 > ab$:
Նկատենք, որ վերջնական անհավասարության հավասարության դեպքերը տեղի ունեն երբ $a=b$: Քանի որ ստացված անհավասարությունը համարժեք է սկզբնական անհավասարությանը, սկզբնական անհավասարության հավա{ սարության դեպքերը կլինեն, երբ $a=b$:

Խնդիր 2.
Լուծում. Քանի որ հավասարման աջ կողմը բնական թիվ է, հետևաբար $a \geq 0$: Տեղադրելով $a=0$ ստացվում է $b^2=5$, որը հնարավոր չէ: Հետևաբար b-ն պետք է լինի զույգ թիվ, ուստի տեղադրելով $b=2c$ և կատարելով կրճատումներ, կստանանք, որ

$$4^{a-1}+a^2+1=c^2 :$$

Նկատենք, որ 4^{a-1}-ը լրիվ քառակուսի է՝ $4^{a-1}=\left(2^{a-1}\right)^2$: Որպեսզի $4^{a-1}+a^2+1$-ը լինի լրիվ քառակուսի, անհրաժեշտ է, որ $4^{a-1}+a^2+1 \geq (2^{a-1}+1)^2$: Պարզեցնելով անհավասարումը կստանանք, որ $a^2 \geq 2^a$: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով կարելի է ցույց տալ, որ այս անհավասարումը տեղի ունի, երբ $a \leq 4$: Ստացանք, որ $1 \leq a \leq 4$: Տեղադրելով սկզբնական հավասարման մեջ ստանում ենք, որ $(a,\, b)$-ի հնարավոր տարբերակներն են $(2,\, 6)$, $(2,\, -6)$, $(4,\, 18)$ և $(4,\, -18)$:

Խնդիր 3.

Լուծում. Թիվը կանվանենք «եռրորդական», եթե այն $\frac{m}{3^n}$ տեսքի է, որտեղ $m, n \geq 0$: Տարան կանվանենք «լավ», եթե այն պարունակում է եռրորդական լիտր ջուր: Ցույց տանք, որ բոլոր տարաները միշտ կլինեն լավը: Պարզ է, որ սկզբնական իրավիճակը բավարարում է այս պայմանին: Այսպիսով, ունենք $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ լ ջուր պարունակող լավ տարաներ: Ապացուցենք, որ ինչ քայլ էլ կատարենք, բոլոր տարաները կմնան լավը: Վերցնենք i-րդ տարան՝ $a_i > 0$ լ ջուր պարունակող: Այն պետք է բաժանենք 3 հավասար մասի և այդ մասերը լցնենք տարաների մեջ:

Լեմմա. Եռրորդական թվերի գումարը միշտ եռրորդական է:

Ապացույց. Դիցուք $b_1 \leq b_2$, և $\frac{a_1}{3^{b_1}}, \frac{a_2}{3^{b_2}}$ թվերը կամայական եռրորդական թվեր են: Ցույց տանք, որ նրանց գումարը ևս եռրորդական է:

$$\frac{a_1}{3^{b_1}} + \frac{a_2}{3^{b_2}} = \frac{3^{b_2-b_1}a_1 + a_2}{3^{b_2}},$$

որը եռրորդական թիվ է:

Այսպիսով, երբ վերցնում ենք որևէ լավ տարա, որի մեջ եղած ջուրը բաժանում ենք երեք հավասար մասի, ստացված մասում կլինի նորից եռրորդական լ ջուր: Այսպիսով, այն լցնելով որևէ լավ տարայի մեջ, տարայում եղած ջուրը կլինի եռրորդական թվերի գումար, որը ևս եռրորդական թիվ է, ինչը նշանակում է, որ տարան կմնա լավը: Քանի որ $\frac{1}{10}$ լ ջուր պարունակող տարան լավը չէ, ապա հնարավոր չէ:

Խնդիր 4.

Լուծում. Առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ $AB > AC$: Քանի որ $OM \perp BC$ և $BC \perp AK$, հետևաբար $OM \parallel AK$: Մնում է ցույց տալ, որ $AM \parallel OK$: Նշանակենք $\angle ABC = \alpha$: Քանի որ $BCED$-ն ներգծյալ քառանկյուն է, $\angle CED = 180^\circ - \alpha$, հետևաբար $\angle AED = \alpha$: Քանի որ $AK \perp BC$, ապա $\angle KAE = \angle ABC = \alpha$: Ստացվում է, որ $\triangle AKE$-ն հավասարասրուն է, ուստի $AK = KE$: Քանի որ $\triangle ADE$-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, և $AK = KE$, հետևաբար AK-ն այդ եռանկյան միջնագիծն է, հետևաբար $DK = KE$: Այստեղից անմիջապես բխում է, որ $OK \perp DE$, քանի որ O-ն $BCED$ քառանկյանը արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այժմ ցույց տանք, որ $\angle MAK + \angle AKO = 180^\circ$: $\angle MAK = 90^\circ - 2\alpha$, իսկ $\angle AKO = \angle AKD + \angle DKO = 2\alpha + 90^\circ$, հետևաբար $\angle MAK + \angle AKO = 180^\circ$, հետևաբար $AM \parallel OK$: