Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի դպրոցական փուլ 2024-2025 ուստարի
9-րդ դասարան
Տևողությունը – 2 ժամ 30 րոպե
ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

1. Հաշվե՛ք արտահայտության արժեքը. $\frac{(6!)^2}{(6\cdot6)!}\cdot\frac{35!}{5!\cdot5!}$:
($n!$-ով նշանակվում է 1-ից n բնական թվերի արտադրյալը՝ $n! = 1\cdot2\cdot\ \dots\ \cdot n$):
1) $\frac{1}{6}$ 2) 1 3) $\frac{1}{36}$ 4) 36
Լուծում. $\frac{(6!)^2}{(6\cdot6)!}\cdot\frac{35!}{5!\cdot5!} = \frac{6!\cdot6!}{5!\cdot5!}\cdot\frac{35!}{36!} = \frac{6^2}{36} = 1$:

2. Հայտնի է, որ $3a + 4b + 3$-ն բաժանվում է 8-ի, որտեղ a և b թվերը ամբողջ են: Պարզե՛ք, թե ի՞նչ մնացորդ է ստացվում $13a - 4b + 7$-ը 8-ի բաժանելիս:
1) 5 2) 2 3) 6 4) այլ պատասխան
Լուծում. Քանի որ $3a + 4b + 3$ թիվը բաժանվում է 8-ի, ապա $7(3a + 4b + 3) = 21a + 28b + 21$-ը նույնպես բաժանվում է 8-ի: Այն կարող ենք ձևափոխել և ստանալ $21a + 28b + 21 = (13a - 4b + 7) + (8a + 32b + 8 + 6)$: Քանի որ երկրորդ փակագծի արժեքը 8-ի բաժանելիս տալիս է 6 մնացորդ, ուրեմն որպեսզի գումարը բաժանվի 8-ի, պետք է որ առաջին փակագծի արժեքը 8-ի բաժանելիս տա 2 մնացորդ:

3. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 5 տարբեր գործիքները տեղավորել 3 դարակումներում (պարտադիր չէ, որ յուրաքանչյուր դարակում գործիք լինի):
1) 243 2) 125 3) 10 4) այլ պատասխան
Լուծում. Յուրաքանչյուր գործիք կարող է լինել 3 արկղերից որևէ մեկում: Քանի որ գործիքների դիրքերը մեկը մյուսից անկախ է, ընդհանուր կստացվի $3^5 = 243$ եղանակ:

4. Դիցուք $a,\ b$ դրական թվերն այնպիսին են, որ $a^2 + b^2 = 49$, իսկ $ab = 16$: Գտե՛ք $a + b$-ն:
1) 7 2) $\sqrt{65}$ 3) 9 4) $\sqrt{114}$
Լուծում. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 49 + 32 = 81$, հետևաբար $a + b = 9$ (չմոռանանք որ $a, b > 0$ ուստի $a + b \neq -9$):

5. Գտե՛ք $19\cdot9^{100} - 6$ թիվը 7-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:
1) 6 2) 2 3) 4 4) 5
Լուծում. Քանի որ 9-ը և 2-ը 7-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ուրեմն $19\cdot9^{100} - 6$-ը 7-ի բաժանելիս տալիս է նույն մնացորդը, ինչ $19\cdot2^{100} - 6$-ը: Քանի որ $2^{100} = (2^3)^{33}\cdot2 = 8^{33}\cdot2$, իսկ 8-ը 7-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, ուրեմն դա իր հերթին նույն մնացորդն է տալիս, ինչ $19\cdot1^{33}\cdot2 - 6$-ը, որը հավասար է $38 - 6 = 32 = 7\cdot4 + 4$: Այսպիսով, մնացորդը 4 է:

6. 6-ի բաժանվող եռանիշ թվի վերջին թվանշանը ջնջելուց ստացված երկնիշ թիվը բաժանվում է 12-ի: Գտե՛ք այդպիսի թվերի քանակը:
1) 18 2) 8 3) 10 4) 16

Լուծում. Որպեսզի թիվը բաժանվի 6-ի, պետք է դրա թվանշանների գումարը բաժանվի 3-ի և այդ թիվը վերջանա զույգ թվանշանով: Քանի որ վերջին թվանշանը ջնջելուց ստացվող երնիշ թիվը բաժանվէում է 12-ի, ուրեմն երկնիշ թվի թվանշանների գումարը նույնպես բաժանվում է 3: Այսպիսով, եռանիշ թվի վերջին թվանշանը պետք է լինի զույգ և բաժանվի 3-ի: Այդպիսի թվանշանները 0-ն և 6-ն են՝ 2 հատ: Բոլոր հնարավոր եռանիշ թվերը կազմված են 12-ի բաժանող երկնիշ թվից, որին կցագրված է 0 կամ 6, իսկ 12-ի բաժանվող երկնիշ թվերը 8 հատ են, ուրեմն այդպիսի եռանիշ թվերի քանակը $8 \cdot 2 = 16$ է:

7. Հակոբն ունի 7 գիրք, որոնցից 3-ը կանաչ են, 2-ը՝ կապույտ, իսկ մյուս 2-ը՝ կարմիր: Նա ուզում է գրքերն իրար կողք դասավորել այնպես, որ նույն գույնի գրքերը լինեն իրար կողք (միագույն գրքերի միջև այլ գույնի գիրք չլինի): Քանի՞ եղանակով կարող է Հակոբը դասավորել գրքերը:

1) 144 2) 36 3) 24 4) 288

Լուծում. Եթե միագույն գրքերը պետք է լինեն իրար հարևան, ուրեմն կարող ենք ասել, որ գույները դրված են ինչ-որ հերթականությամբ, Օրինակ՝ կարմիր, կապույտ, կանաչ: Երեք գույների հերթականությունն ընտրելու համար կա $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ եղանակ: Յուրաքանչյուր եղանակի դեպքում 3 կանաչ գրքերը կարող ենք իրար մեջ վերադասավորել $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ եղանակով, 2 կարմիրները՝ $2 \cdot 1 = 2$ եղանակով, իսկ 2 կապույտները կրկին $2 \cdot 1 = 2$ եղանակով: Ընդհանուր դասավորությունների քանակը ստացվում է $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$:

8. $y = x^2 + x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը տեղափոխել են a միավորով աջ և a միավորով վերև: Ստացված գրաֆիկը ունի միայն մեկ հատում x-երի առանցքի հետ: Գտնել a-ն:

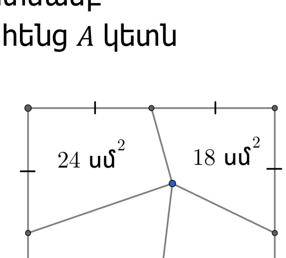
1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\frac{3}{4}$

Լուծում. $y = x^2 + x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը a միավորով աջ և a միավորով վերև տեղափոխելուց հետո ստացվում է $y = (x - a)^2 + (x - a) + a$ ֆունկցիան: Քանի որ այն պետք է ունենա ճիշտ մեկ հատում x-երի առանցքի հետ, ապա կարող ենք եզրակացնել, որ $x^2 - (2a - 1)x + a^2$ քառակուսի եռանդամի դիսկրիմինանտը հավասար է 0-ի: Այսինքն՝ $(2a - 1)^2 - 4a^2 = 1 - 4a = 0$, որտեղից էլ ստացվում է, որ $a = \frac{1}{4}$:

9. Հայկը կառուցեց կոորդինատային հարթության վրա նշված A կետի համաչափը $y = - x$ ուղղի նկատմամբ, այնուհետև ստացված կետի համաչափը՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ և ստացավ $C(2, - 1)$ կետը: Գտե՛ք A կետի կոորդինատները:

1) $(2, - 1)$ 2) $(- 1, 2)$ 3) $(1, - 2)$ 4) $(- 2, 1)$

Լուծում. $C(2, - 1)$ կետի համաչափը կոորդինատների սկզբնակակետի նկատմամբ $B(- 2, 1)$ կետն է, իսկ $B(- 2, 1)$ կետի համաչափը $y = - x$ ուղղի նկատմամբ հենց A կետն է, որի կոորդինատներն են $A(- 1, 2)$:



10. Նկարում պատկերված քառակուսու մեջ նշված կետը միացված է կողմերի միջնակետերին: Ստացված քառանկյուններից երեքի մակերեսները գրված են, գտե՛ք չորրորդ քառանկյան մակերեսը:

1) 31 2) 34 3) 30 4) 32

Լուծում. Քառակուսու գագաթները նշանակենք A, B, C, D, կողմերի միջնակետները՝ M_1, M_2, M_3, M_4, իսկ ներքին կետը՝ O: $AM_1 = M_1B \Rightarrow S_{AOM_1} = S_{BOM_1}$ (որտեղ S_{AOM_1}-ը ցույց է տալիս AOM_1 եռանկյան մակերեսը): Նմանապես կարող ենք ասել, որ $S_{BOM_2} = S_{COM_2}$, $S_{COM_3} = S_{DOM_3}$, $S_{DOM_4} = S_{AOM_4}$: Ուստի

$36 + 18 = S_{AM_1OM_4} + S_{CM_2OM_3} = S_{AOM_1} + S_{AOM_4} + S_{COM_2} + S_{COM_3} = S_{BOM_1} + S_{BOM_2} + S_{DOM_3} + S_{DOM_4} =$
$= S_{BM_1OM_2} + S_{DM_3OM_4} = 24 + ?$, այստեղից էլ ստանում ենք $? = 36 + 18 - 24 = 30$:

11. Զառը նետում են երկու անգամ: Որքա՞ն է հավանականությունը, որ առաջին նետման ցուցմունքը փոքր չի լինի երկրորդ նետման ցուցմունքից:

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{15}{36}$ 4) $\frac{21}{36}$

Լուծում. Հավանականությունը հաշվելու համար պետք է հաշվենք նպաստավոր դեպքերի քանակը և բաժանենք բոլոր հնարավոր դեպքերի քանակի վրա: Ենթադրենք, առաջին նետման ցուցմունքը a է, իսկ երկրորդինը՝ b: Պետք է գտնենք այն դեպքերի քանակը, որտեղ $a \geq b$: Դիտարկենք (a, b) կարգավորված թվազույգերի բոլոր հնարավոր տարբերակները՝ $(1, 1)$, $(1, 2)$, $\cdots$ $(6, 6)$: Ընդհանուր կա 36 տարբերակ: Այն դեպքերը, որտեղ $a = b$, բավարարում են $a \geq b$ պայմանին: Դրանց քանակը 6 է՝ $(1, 1)$, $(2, 2)$, $\cdots$ $(6, 6)$: Կմնա $36 - 6 = 30$ հնարավոր տարբերակ, որտեղ նույն թվազույգում գրված թվերը իրար հավասար չեն: Պարզ է, որ եթե որևէ (x, y) թվազույգ բավարարում է նշված անհավասարմանը, ապա (y, x) թվազույգը չի բավարարում: Ստացվում է, որ մնացած 30-ից, պայմանին բավարարում են 15-ը: Այսպիսով, դեպքերի բավարարող թվազույգերի քանակը կլինի $15 + 6 = 21$: Հետևաբար հավանականությունը կլինի $\frac{21}{36}$:

12. Դիցուք x_1 և x_2 թվերը $3x^2 - 12x + 6 = 0$ հավասարման արմատներն են: Գտնել $x_1^3 + x_2^3$-ի արժեքը:

1) 72 2) 44 3) 56 4) 40

Լուծում. Քանի որ $3x_1^2 - 12x_1 + 6 = 0$, ուրեմն $x_1^2 = 4x_1 - 2$, նույնը կարող ենք ասել x_2-ի մասին: Համաձայն Վիետի թեորեմի $x_1 + x_2 = 4$, $x_1x_2 = 2$: Ձևափոխենք պահանջվող արտահայտությունը

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(4x_1 - 2 - x_1x_2 + 4x_2 - 2) =$
$= (x_1 + x_2) \cdot (4(x_1 + x_2) - 4 - x_1x_2) = 4 \cdot (16 - 4 - 2) = 40$:

13. Շախմատի նոր խաղաքարը՝ «ասպետը» շարժվում է հետևյալ կերպ: Այն կարող է տեղափոխվել միևնույն տողի կամ միևնույն սյան ցանկացած վանդակ, ինչպես նաև իր վանդակի հետ ընդհանուր գագաթ ունեցող ցանկացած վանդակ: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 8×8 տախտակի վրա դասավորել 1 սև և 1 սպիտակ ասպետ այնպես, որ ասպետներն իրար չհարվածեն:

1) 2940 2) 1960 3) 2880 4) այլ պատասխան

Լուծում. Հնարավոր եղանակների քանակը գտնելու համար դիտարկենք երեք դեպք՝
Դեպք 1. Սպիտակ ասպետը գտնվում է տախտակի անկյունային վանդակում: Այս դեպքում

սպիտակ ասպետը կարող է գտնվել 4 հնարավոր դիրքերում և հարվածում է 15 այլ վանդակների, թողնելով սև ասպետին $64 - 15 - 1 = 48$ հնարավորություն: Արդյունքում՝ $4 \cdot 48 = 192$ եղանակ:
Դեպք 2. Սպիտակ ասպետը գտնվում է տախտային եզրային, բայց ոչ անկյունային վանդակում: Այս դեպքում սպիտակ ասպետը կարող է գտնվել 24 հնարավոր դիրքերում և հարվածում է 16 այլ վանդակների, թողնելով սև ասպետին $64 - 16 - 1 = 47$ հնարավորություն: Արդյունքում՝ $24 \cdot 47 = 1128$ եղանակ:
Դեպք 3. Սպիտակ ասպետը գտնվում է ոչ եզրային վանդակում: Տախտակը ունի 36 ոչ եզրային վանդակ, որոնցում գտնվող սպիտակ ասպետը հարվածում է 18 այլ վանդակների, թողնելով սև ասպետին $64 - 18 - 1 = 45$ հնարավորություն: Արդյունքում՝ $36 \cdot 45 = 1620$ եղանակ:
Ամփոփելով՝ կունենանք 2940 հնարավոր եղանակ:

14. Բնական a թիվ հետաքրիր է, եթե գոյություն ունի b բնական թիվ այնպես, որ $a^2 + b^2 = 2025$: Գտե՛ք հետաքրքիր բնական թվերի քանակը:

1) 1 2) 2 3) 4 4) 0

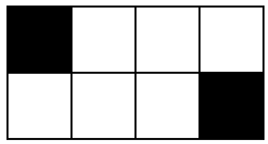
Լուծում. Գտնենք բոլոր (a, b) կարգավորված թվազույգերը,որոնք բավարարում են տրված հավասարությանը: Նկատենք, որ եթե (a, b) թվազույգը լուծում է, ապա (b, a) թվազույգը ևս լուծում է: Ուստի առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ a-ն կենտ է, իսկ b-ն՝ զույգ: Ձևափոխելով $a^2 + b^2 = 2025$ արտահայտությունը ստանում ենք $a^2 = (45 - b)(45 + b)$: Դիցուք
$d = (45 - b, 45 + b) = (45 - b, 90) = (45 - b, 45) = (b, 45)$: Նշակենք,
$b = d \cdot x$, $a = d \cdot y$, $45 = d \cdot z$: Այսպիսով, $a^2 = d^2(z - x)(z + x)$ հետևաբար d^2-ով կրճատելով ստանում ենք $y^2 = (z - x)(z + x)$, որտեղ աջ կողմի արտադրիչները փոխադարձաբար պարզ են, ուստի յուրաքանչյուրը պետք է լինի լրիվ քառակուսի, ընդ որում z-ի հնարավոր արժեքներն են $1, 3, 5, 9, 15, 45$: Դիտարկելով բոլոր դեպքերը ստանում ենք, որ հնարավոր է միայն $z = 5$, $x = 4$ դեպքը: Այստեղից, ստանում ենք, որ $d = 9$, հետևաբար $a = 27$, $b = 36$: Այսպիսով, կստանանք երկու լուծում $(27, 36)$, $(36, 27)$:

15. Հաշվե՛ք բոլոր երկնիշ թվերի գումարը, որոնց թվանշանների արտադրյալը 2-ով փոքր է դրա թվանշանների գումարի կրկնակիից:

1) 77 2) 66 3) 78 4) այլ պատասխան

Լուծում. Եթե $\overline{ab}$ երկնիշ թիվը բավարարում է խնդրի պայմանին, ապա $ab = 2(a + b) - 2$, որը ձևափոխելով կստանանք $(a - 2)(b - 2) = 2$: Այս պայմանը կարող է բավարարվել 3 դեպքում՝ 1) $a = 3$, $b = 4$, 2) $a = 4$, $b = 3$, 3) $a = 1$, $b = 0$: Ստացված թվերի գումարը $43 + 34 + 10 = 87$ է:
Պատասխան՝ 87:

16. 2×4 չափանի տախտակի անկյունային վանդակները ներկված են սև գույնով, ինչպես ցույց է տրված նկարում: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 2 միանման խնձոր և 2 միանման նարինջ դնել տախտակի վրա այնպես, որ մրգերից գոնե մեկը լինի սև վանդակի վրա (յուրաքանչյուր վանդակի վրա կարող է լինել առավելագույնը մեկ միրգ):



Լուծում. Բացառման սկզբունքից օգտվելով հաշվենք մրգերը դնելու բոլոր հնարավոր դեպքերը և հանենք այն եղանակները, որտեղ մրգերը դրված են միայն սպիտակ վանդակներում: Տախտակի վրա 2 միանման խնձոր և 2 միանման նարինջ դնելու հնարավորությունները հավասար է $\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot2} = 420$: Եղանակների քանակը, որ բոլոր մրգերը դրված են միայն սպիտակ վանդակներում հավասար է $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot2} = 90$: Արդյունքում՝ կունենանք $420 - 90 = 330$ հնարավոր եղանակ:

Պատասխան՝ 330:

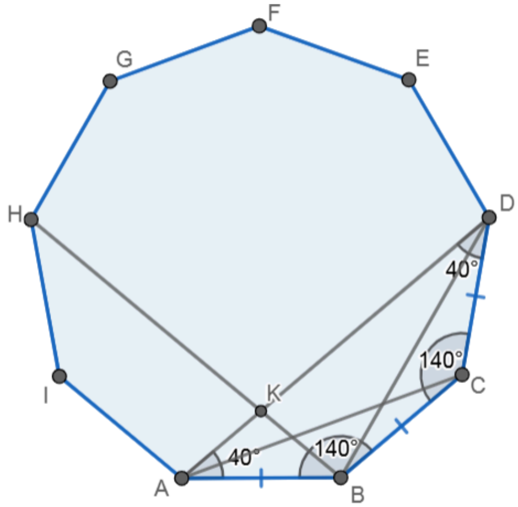
17. Հաշվե՛ք 1-ից 777 թվերի մեջ այն բնական թվերի քանակը, որոնք բաժանվում են 7-ի, բայց չեն բաժանվում ո՛չ 3-ի, ո՛չ 37-ի:

Լուծում. 1-ից 777 թվերի մեջ յուրաքանչյուր 7-րդը բաժանվում է 7-ի, ուստի կա $777:7 = 111$ այդպիսի թիվ: Դիտարկենք այդ թվերը. $1\cdot7,\ 2\cdot7,\ 3\cdot7,\ 4\cdot7,\ \cdots,\ 111\cdot7$: Պարզ է, որ այս թվերից յուրաքանչյուր 3-րդը բաժանվում է 3-ի՝ $3\cdot7,\ 6\cdot7,\ 9\cdot7,\cdots\ 111\cdot7$, ուստի դրանց քանակը $111:3 = 37$: Մյուս կողմից 37-ի բաժանվում են ընդամենը 3 թիվ՝ $37\cdot7,\ 74\cdot7,\ 111\cdot7$: Նկատենք, որ $111\cdot7$-ը կա և՛ առաջին խմբում, և՛ երկրորդ խմբում հետևաբար 3-ի կամ 37-ի բաժանվող թվերի քանակը կլինի $37 + 3 - 1 = 39$: Այսպիսով, 7-ի բաժանվող, 3-ի և 37-ի չբաժանվող թվերի քանակը կլինի $111 - 39 = 72$:

Պատասխան՝ 72:

18. $ABCDEFGHI$ կանոնավոր իննանկյան AD և BH կողմերը հատվում են K կետում: Գտե՛ք AKB անկյան աստիճանային չափը:

Լուծում. Ուռուցիկ n-անկյան անկյունների գումարը հավասար է $180^o\cdot(n-2)$-ի: Քանի որ կանոնավոր 9-անկյան անկյուններն իրար հավասար են, դրանցից յուրաքանչյուրի չափը $\frac{180^o\cdot(9-2)}{9} = 140^o$ է:



Դիտարկենք $ABCD$ քառանկյունը: Եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի համաձայն՝ $\triangle ABC = \triangle BCD$, ուրեմն՝ $AC = BD$: Այնուհետև, եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի համաձայն $\triangle ABD = \triangle DCA$, ուրեմն՝ $\angle BAD = \angle CDA$:

$ABCD$ քառանկյան անկյունների գումարը 360^o է.

$360^o = \angle BAD + \angle CDA + \angle ABC + \angle BCD$ կամ

$360^o = 2\cdot\angle BAD + 2\cdot140^o$: Այստեղից հետևում է, որ $\angle BAK = \angle BAD = 40^o$: Նույն եղանակով $HIAB$ քառանկյունից էլ կստանանք, որ $\angle ABK = 40^o$: Դիտարկելով AKB եռանկյան անկյունների գումարը՝ ստանում ենք

$\angle AKB = 180^o - 40^o - 40^o = 100^o$:

Պատասխան՝ 100:

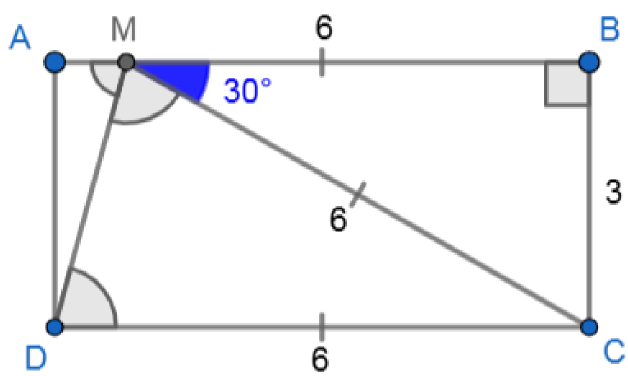
19. Գտնել $y = |x| - 5$ և $y = 7$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում. Կարելի է ցույց տալ, որ $y = |x| - 5$ և $y = 7$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով սահմանափակված պատկերը $A(0, -5)$, $B(-12, 7)$, $C(12, 7)$ գագաթներով ուղղանկյուն եռանկյունն է: Նկատենք, որ $H(0, 7)$ կետը միացնելով A կետին կստանանք, ABC ուղղանկյուն եռանկյան BC ներքնաձիգին տարված AH բարձրությունը: Այստեղից կստանանք, որ սահմանափակված պատկերի մակերեսը հավասար

$S = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 24}{2} = 144$:

Պատասխան՝ 144:

20. Տրված է $ABCD$ ուղղանկյունը $AB = 6$ և $BC = 3$: AB կողմի վրա ընտրված է M կետ այնպես, որ MD ճառագայթը AMC անկյան կիսորդն է: Գտե՛ք AMD անկյան աստիճանային չափը.



Լուծում. Ըստ խնդրի պայմանի՝ $\angle AMD = \angle DMC$: Տեղի ունի նաև $\angle AMD = \angle MDC$ հավասարությունը, քանի որ դրանք խաչադիր անկյուններ են: Ստացվեց, որ $\angle DMC = \angle MDC$, այսինքն CMD եռանկյունը հավասարասրուն է՝ $MC = DC = 6$:

Դիտարկենք MBC ուղղանկյուն եռանկյունը: Այդ եռանկյան ներքնաձիգը երկու անգամ երկար է BC էջից: Ուրեմն, $\angle MBC = 30^o$:

Հետևաբար՝ $\angle AMD = \frac{\angle AMC}{2} = \frac{180^o - 30^o}{2} = \frac{150^o}{2} = 75^o$:

Պատասխան՝ 75: