

Լուծումներ
8-րդ դասարան

Խնդիր 1: a, b, c իրական թվերի համար տեղի ունեն $abc \geq 0$ և $a + b + c = 1$ պայմանները: Ապացուցել, որ.

$$ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Լուծում: Ձևափոխենք անհավասարությունը՝

$$\begin{aligned} ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) &= ab(1 - c) + ac(1 - b) + bc(1 - a) \\ &= ab + ac + bc - 3abc \leq ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Վերջին անհավասարությունը ապացուցելու համար ձախ մասը տանենք աջ՝

$$0 \leq a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2)$$

Աջ մասում ստացվում է քառակուսիների գումար, որը ոչբացասական է:

Խնդիր 2: a, b դրական ամբողջ թվերի համար $a^2 + b^2$ -ն բաժանվում է ab -ի: Ապացուցել, որ $a = b$:

Լուծում: Նշանակենք d -ով a -ի և b -ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ (a, b) -ն: Այդ դեպքում՝ $a = d \cdot x$ և $b = d \cdot y$, որտեղ $(x, y) = 1$: Ունենք՝

$$a^2 + b^2 : ab \Rightarrow d^2(x + y) : d^2xy \Rightarrow x^2 + y^2 : xy$$

Ցույց տանք որ, $(xy, x^2 + y^2) = 1$: Ենթադրենք՝ որևէ p պարզ թվի համար՝

$$\left\{ \begin{array}{l} xy : p \\ x^2 + y^2 : p \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x : p \text{ (կամ } y : p) \\ x^2 + y^2 : p \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x : p \\ y^2 : p \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x : p \\ y : p \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) \neq 1$$

Ստացանք հակասություն, հետևաբար $(xy, x^2 + y^2) = 1$: Բայց քանի որ $x^2 + y^2 : xy \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = y = 1$: Ստացանք՝ $x = y = 1 \Rightarrow a = dx = dy = b$:

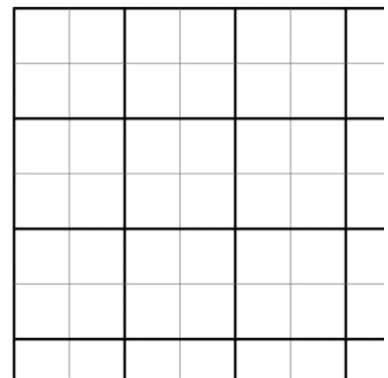
Խնդիր 3: $ABCD$ սեղանում ($BC \parallel AD$) $\angle A = 50^\circ$ և $\angle D = 80^\circ$: CB և CD ճառագայթների վրա (CB և CD հատվածից դուրս) վերցված են համապատասխանաբար E և F կետերն այնպես, որ $BE = CD$ և $DF = BC$: EF և AD հատվածները հատվում են K կետում: Ապացուցել, որ $AEBK$ -ն շեղանկյուն է:

Լուծում: $CE = CB + BE = CB + CD = CD + DF = CF$, հետևաբար $\triangle CEF$ -ը հավասարասրուն է և $\angle CEF = \angle CFE$: Ունենք՝ $CE \parallel DK \Rightarrow \angle CEF = \angle DKF$, հետևաբար $\triangle DKF$ -ը ևս հավասարասրուն է, հետևաբար $DK = DF = BC$: Ունենք՝ $BC \parallel KD$ և $BC = KD$, հետևաբար $BCDK$ -ն զուգահեռագիծ է, և $BK = CD = BE$, հետևաբար $\triangle BEK$ -ն ևս հավասարասրուն է:

$\angle ABK = 180^\circ - \angle BAK - \angle BKA = 180^\circ - \angle BAK - \angle CDA$ ($BK \parallel CD$) $= 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$: Ստացանք՝ $\angle ABK = \angle BAK = 50^\circ$, հետևաբար $\triangle ABK$ -ն ևս հավասարասրուն է, ուրեմն՝ $KA = KB = BE$: Ունենք՝ $EB \parallel AK$ և $EB = AK$, հետևաբար $AEBK$ -ն զուգահեռագիծ է: Բայց $AEBK$ -ի երեք կողմերն իրար հավասար են, հետևաբար այն շեղանկյուն է:

Խնդիր 4: Տրված է n դրական ամբողջ թիվը: $2n \times 2n$ աղյուսակի յուրաքանչյուր վանդակում գրված է 1-ից 10 դրական ամբողջ թվերից որևէ մեկը: Ցանկացած երկու վանդակում, որոնք ունեն ընդհանուր գագաթ, գրված են փոխադարձաբար պարզ թվեր: Ապացուցել, որ գոյություն ունի թիվ, որն աղյուսակում հանդիպում է առնվազն $\frac{2n^2}{3}$ անգամ:

Լուծում: Տրոհենք աղյուսակը n^2 հատ 2×2 չափի քառակուսիների, ինչպես ցույց է տրված նկարում:



Նկատենք, որ յուրաքանչյուր այդպիսի քառակուսու չորս վանդակներում գրված թվերը պետք է զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ լինեն: Հետևաբար՝ յուրաքանչյուր այդպիսի քառակուսում կա առավելագույնը մեկ վանդակ, որ պարունակում է $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ թվերից որևէ մեկը, և առավելագույնը մեկ վանդակ, որ պարունակում է $\{3, 9\}$ թվերից որևէ մեկը: Նշանակում է՝ յուրաքանչյուր քառակուսում կա առնվազն երկու վանդակ, որ պարունակում է $\{1, 5, 7\}$ թվերից մեկը:

Քանի որ ընդհանուր n^2 հատ 2×2 քառակուսի կա, ապա 1, 5 կամ 7 պարունակող վանդակների քանակը առնվազն $2n^2$ է: Հետևաբար, $\{1, 5, 7\}$ թվերից գոնե մեկը հանդիպում է առնվազն $\frac{2n^2}{3}$ անգամ: