Լուծումներ
8-րդ դասարան

Խնդիր 1.
Լուծում. Անհավասարության ձախը մասը բերենք ընդհանուր հայտարարի՝

$$\frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{2}{1+ab} :$$

Քանի որ հայտարարում եղած բոլոր արտադրիչները դրական են, կարող ենք անհավասարության երկու կողմերը բազմապատկել այդ արտադրիչներով առանց անհավասարության նշանը փոխելու՝

$$(1+ab)(2+a^2+b^2) \leq 2(1+a^2)(1+b^2) :$$

Բացելով փակագծերը և բոլոր գումարելիները տեղափոխելով աջ ստանում ենք՝

$$2ab+a^3b+ab^3-a^2-b^2-2a^2b^2 \leq 0 :$$

Կատարելով նույնական ձևափոխություններ՝ անհավասարության ձախ մասը վերլուծենք արտադրիչների.

$$ab(a^2-2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=(ab-1)(a-b)^2 \leq 0 :$$

Ունենալով, որ $ab < 1$, ստացված անհավասարումը ակնհայտորեն ճիշտ է: Նկատենք, որ այս անհավասարության հավասարության դեպքերը տեղի ունեն երբ $a=b$: Քանի որ ստացված անհավասարությունը համարժեք է սկզբնական անհավասարությանը, սկզբնական անհավասարության հավասարության դեպքերը կլինեն, երբ $a=b$:

Խնդիր 2.
Լուծում. Դիցուք $n=ab$, որտեղ $1<a\leq b<n$: Ունենք, որ $ab+1-a-b=(a-1)(b-1)\geq 1$, հետևաբար

$$a+b\leq ab=n \qquad (1)$$

Մյուս կողմից, խնդրի պայմանից հետևում է, որ $n-12\geq a\geq n-20$ և $n-12\geq b\geq n-20$: Որտեղից ստանում ենք

$$2(n-20)\leq a+b \qquad (2)$$

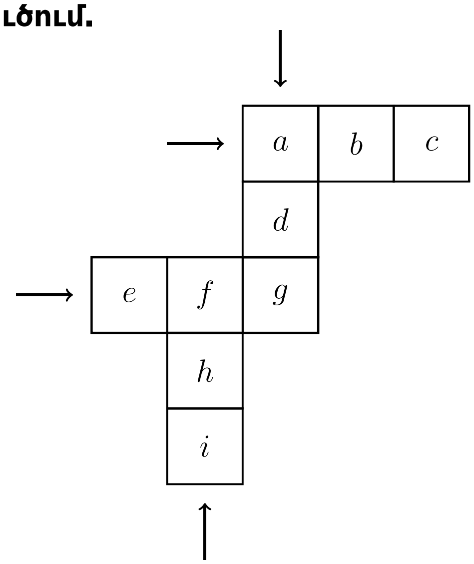
$(1),(2)$-ից հետևում է $n\leq 40$: Քանի որ $b\leq n-12$ հետևում է $n\geq 14$: Եթե n թիվը լինի զույգ կստացվի $2\geq n-20$ և $n/2\leq n-12$, որը հակասություն է: Հետևաբար մնաց դիտրակել 14-ից 40 կենտ բաղադրյալ թվերը: Այսինքն մնաց դիտարկել $15,21,25,27,33,35,39$ թվերը: Ստուգելով ստանում ենք, որ բավարարում են 21 և 25 թվերը:
Խնդիր 3.
Լուծում. CD ճառագայթի վրա՝ CD հատվածի շարունակության վրա վերցնենք N կետը այնպես, որ $DN=BM$: Քանի որ $DN=BM$, $AD=AB$, և $\angle ABM=\angle ADN=90°$, հետևաբար $\triangle ABM=\triangle ADN$, որտեղից բխում է, որ

$\angle BAM = \angle DAN$ և $\angle ABM = \angle AND$:
Քանի որ $\angle BAM = \angle DAN$, հետևաբար $\angle MAN = \angle BAD = 90^\circ$:
Քանի որ $BM = DN$, հետևաբար $AK = BM + KD = DN + KD = KN$, հետևաբար $\triangle AKN$-ը հավասարուն է, այսինքն $\angle KAN = \angle KNA = \angle AMB$:

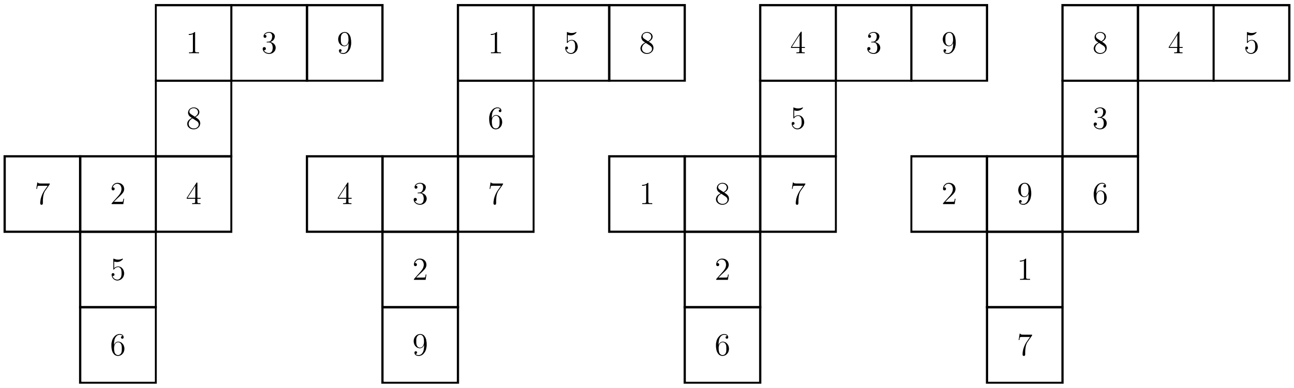
$$\begin{cases} \angle AMB = 90^\circ - \angle BAM \\ \angle KAN = 90^\circ - \angle MAK \\ \angle AMB = \angle KAN \end{cases}$$

հետևաբար $\angle BAM = \angle MAK$:

Խնդիր 4.
Լուծում.



Վանդակների մեջ գրված թվերը նշանակենք, ինչպես ցույց է տրված նկարում, իսկ x-ով նշանակենք Վահանի ունեցած կատուների թիվը:
Եթե գումարենք երկու սյուների և վերևի տողի թվերը, ապա բացի a և e թվերից մնացածը կօգտագործվեն մեկ անգամ, a-ն կօգտագործվի երկու անգամ, իսկ e-ն՝ ոչ մի անգամ: Քանի որ $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, հետևաբար վերոնշյալ գումարը կլինի $45 + a - e = 3x$: Քանի որ $-8 \leq a - e \leq 8$, ապա $37 \leq 3x \leq 53$, այսինքն $13 \leq x \leq 17$:
Այժմ ապացուցենք, որ $x \neq 15$: Եթե $x = 15$, ապա $a+b+c = e+f+g = f+h+i = 15$: Բայց մյուս կողմից $45 - (a + b + c) - (e + f + g) = d + h + i = 15$, որտեղից ստացվում է, որ $d = f$, ինչը հնարավոր չէ:
Լուծումն ավարտելու համար մնաց կառուցել $x = 13, 14, 16, 17$ դեպքերին համապատասխանող օրինակներ:


1 3 9
8
7 2 4
5
6
1 5 8
6
4 3 7
2
9
4 3 9
5
1 8 7
2
6
8 4 5
3
2 9 6
1
7