Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի դպրոցական փուլ 2024-2025 ուստարի
8-րդ դասարան
Տևողությունը – 2 ժամ 30 րոպե
ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

1. Հաշվե՛ք արտահայություն արժեքը. $\frac{\sqrt{25+70+49}}{2^4-2^2}$:

1) 1 2) 2 3) $\frac{1}{2}$ 4) 4

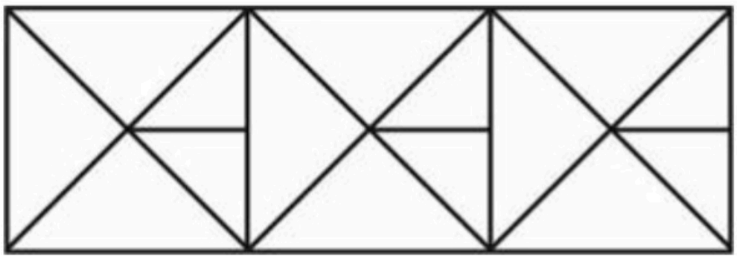
Լուծում. $\frac{\sqrt{25+70+49}}{2^4-2^2} = \frac{\sqrt{5^2+2\cdot5\cdot7+7^2}}{16-4} = \frac{\sqrt{(5+7)^2}}{12} = \frac{12}{12} = 1$:

2. Տորթի կրեմ ստանալու համար պետք է կարագը խառնել խտացրած կաթի հետ, ընդ որում $3:7$ հարաբերությամբ: Ամենաշատը քանի՞ գրամ կրեմ է հնարավոր պատրաստել ունենալով 240գ կարագ և 490գ խտացրած կաթ:

1) 240 2) 730 3) 700 4) 490

Լուծում. Եթե օգտոգործվեր ամբողջ կարագը, ապա պետք կգար $240:3 \cdot 7 = 560$ գրամ խտացրած կաթ, սակայն այդքան չկա: Ուստի կարագն ավելանալու է, իսկ խտացրած կաթն օգտագործվի ամբողջությամբ: 490 գրամ խտացրած կաթի հետ պետք է խառնել $490:7 \cdot 3 = 210$ գրամ կարագ: Կրեմի զանգվածը կստացվի $490 + 210 = 700$ գրամ:

3. Քանի՞ եռանկյուն կա նկարում:



1) 32 2) 34 3) 36 4) 38

Լուծում. Նկարում կա 3 քառակուսի, որոնցից յուրաքանչյուրի մեջ կա 10 հատ եռանկյուն, ստացվեց 30 հատ եռանկյուն: Դրանցից բացի կան եռանկյուններ, որոնք ամբողջությամբ ինչ-որ քառակուսու մեջ չեն, այլ երկու քառակուսիների միջև են: Այդպիսի եռանկյունների քանակը 4 է, ուրեմն ընդհանուր կլինի $30 + 4 = 34$:

4. Քանի՞ եռանիշ թիվ կա, որը 11 անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից:

1) 0 2) 11 3) 198 4) 1

Լուծում. Եռանիշ թիվը կարող ենք գրել $\overline{abc}$ տեսքով: Խնդրի պայմանը համարժեք է $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$, որից կարող ենք ստանալ $89a = 10c + b$: Հաշվի առնելով, որ a, b, c-ն թվանշաններ են, այս հավասարման միակ լուծումը ստանում ենք $a = 1, b = 9, c = 8$, այսպիսով միակ լուծումը ստացվում է $\overline{abc} = 189$:

5. Շաբաթվա ի՞նչ օր կլինի սեպտեմբերի 8-ը, եթե հուլիսի 1-ը եղել է երեքշաբթի:

1) երկուշաբթի 2) երեքշաբթի 3) հինգշաբթի 4) կիրակի

Լուծում. Հուլիսի 1-ը երեքշաբթի է, ուրեմն հուլիսի 8-ը, 15-ը, 22-ը և 29-ը նույնպես

երեքշաբթի են: Հուլիսն ունի 31 օր, ուրեմն հուլիսի 31-ը կլինի հինգշաբթի, իսկ օգոստոսի 1-ը կլինի ուրբաթ, այսինքն օգոստոսի 29-ը նույնպես կլինի ուրբաթ: Օգոստոսն ունի 31 օր, ուրեմն սեպտեմբերի մեկը կլինի երկուշաբթի, ուրեմն սեպտեմբերի 8-ը նույնպես կլինի երկուշաբթի:

6. ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը 2 անգամ մեծ է նույն գագաթից տարված բարձրությունից: Գտե՛ք ABC եռանկյան մեծ սուր անկյան աստիճանային չափը:

1) 15° 2) 30° 3) 60° 4) 75°

Լուծում. Դիցուք ուղիղ անկյան գագաթը B-ն է, որից տարված են BH բարձրությունը և BM միջնագիծը: $\triangle BHM$-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի մեջ ներքնաձիգը երկու անգամ մեծ է էջից՝ $BM = 2BH$, ուստի $\angle BMH = 30^\circ$: Քանի որ ABC ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին՝ $BM = AM = CM$, ուրեմն մեծ սուր անկյունը՝ $(180 - 30): 2 = 75^\circ$:

7. Ի՞նչ թվանշանով է ավարտվում առաջին 2024 կենտ թվերի գումարը:

1) 6 2) 5 3) 0 4) 8

Լուծում. Առաջին 2024 կետ թվերն են $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots$: Նկատենք, որ ամեն հաջորդական հնգյակի գումարն ավարտվում է $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$-ի վերջին թվանշանով, այսինքն 5-ով: 2024 կենտ թվերը տրոհելով հնգյակների, կստանանք $2024: 5 = 404$ հնգյակ և 4 մնացորդ: 404 հնգյակների գումարը վերջանում է $404 \cdot 5 = 2020$-ի վեջին թվանշանով, այսինքն 0-ով, իսկ դրան հաջորդող 4 թվերի գումարը վերջանում է $1 + 3 + 5 + 7 = 16$-ի վերջին թվանշանով, այսինքն 6-ով:

8. Քանի՞ քառանիշ թիվ է հնարավոր կազմել օգտագործվելով $1, 2, 3, 4, 5$ թվանշանները՝ յուրաքանչյուրը առավելագույնը մեկ անգամ, որ ստացված թիվը բաժանվի 12-ի:

1) 2 2) 8 3) 6 4) այլ պատասխան

Լուծում. Որպեսզի թիվը բաժանվի 12-ի, այն պետք է բաժանվի 3-ի և 4-ի: 3-ի բաժանելու համար թվանշանների գումարը պետք է բաժանվի 3-ի: Ունենք $1, 2, 3, 4, 5$ թվանշանները, որոնց գումարը 15 է: Պետք է վերցնենք դրանցից մեկից բացի մնացած 4-ը, և դրանց գումարը բաժանվի 3-ի: Միակ եղանակը այն է, որ վերցնենք $1, 2, 4, 5$ թվանշանները: Մնաց ապահովենք, որ սրանցով կազմված քառանիշ թիվը բաժանվի 4-ի: 4-ի բաժանվելու համար պետք է թվի վերջին երկու թվանշաններով կազմված երկնիշ թիվը բաժանվի 4-ի: Այս թվանշաններով 4-ի բաժանվող երկնիշ թվերն են՝ $12, 52, 24$ թվերը: Յուրաքանչյուր դեպքում մնացած երկու թվանշանները կարող ենք դիմացից ավելացնել 2 եղանակով, օրինակ 3412 և 4312: Այսպիսով ընդհանուր քանակը կլինի $3 \cdot 2 = 6$:

9. Թվին գումարեցին իր կրկնապատիկից 6-ով մեծ թիվ, և ստացվեց սկզբնական թվից 2-ով մեծ թվի եռապատիկը: Քանի՞ այդպիսի թիվ կա:

1) 1 2) 0 3) անվերջ քանակության 4) այլ պատասխան

Լուծում. Անհայտ թիվը նշանակենք x-ով: Պետք է գտնել $x + (2x + 6) = 3(x + 2)$: Ձևափոխելով ստանում ենք $3x + 6 = 3x + 6$, որն ունի անվերջ քանակության լուծումներ:

10. Գտնել $19 \cdot 9^{100} - 6$ թիվը 7-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդը:

1) 4 2) 2 3) 6 4) 5

Լուծում. Քանի որ 9-ը և 2-ը 7-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը, ուրեմն $19 \cdot 9^{100} - 6$-ը 7-ի բաժանելիս տալիս է նույն մնացորդը, ինչ $19 \cdot 2^{100} - 6$-ը: Քանի որ $2^{100} = (2^3)^{33} \cdot 2 = 8^{33} \cdot 2$, իսկ 8-ը 7-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, ուրեմն դա իր հերթին նույն մնացորդն է տալիս, ինչ $19 \cdot 1^{33} \cdot 2 - 6$-ը, որը հավասար է $38 - 6 = 32 = 7 \cdot 4 + 4$: Այսպիսով, մնացորդը 4 է:

11. Նկարում պատկերված ուղղանկյունը բաժանված է 4 ուղղանկյունների, որոնցից 3-ի մեջ գրված են իրենց պարագծերը: Գտե՛ք չորրորդ ուղղանկյան պարագիծը:

6	?
9	14

1) 8 2) 9 3) 10 4) 11

Լուծում. Դժվար չէ հասկանալ, որ անկյունագծորեն տեղադրված վերևի ձախ և ներքևի աջ ուղղանկյունների պարագծերի գումարը հավասար է մեծ ուղղանկյան պարագծին: Նույնը կարող ենք ասել վերևի աջ և ներքևի ձախ ուղղանկյունների մասին: Փաստորեն $6 + 14 = 9 + ?$, ուրեմն անհայտ պարագիծը $6 + 14 - 9 = 11$ է:

12. Հակոբն ունի 7 գիրք, որոնցից 3-ը կանաչ են, 2-ը՝ կապույտ են, իսկ մյուս 2-ը՝ կարմիր են: Նա ուզում է գրքերն իրար կողք դասավորել այնպես, որ նույն գույնի գրքերը լինեն իրար կողք (միագույն գրքերի միջև այլ գույնի գիրք չլինի): Քանի՞ եղանակով է կարող Գրիգորը դասավորել գրքերը:

1) 36 2) 144 3) 72 4) 288

Լուծում. Եթե միագույն գրքերը պետք է լինեն իրար հարևան, ուրեմն կարող ենք ասել, որ գույները դրված են ինչ-որ հերթականությամբ, Օրինակ՝ կարմիր, կապույտ, կանաչ: Երեք գույների հերթականությունն ընտրելու համար կա $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ եղանակ: Յուրաքանչյուր եղանակի դեպքում 3 կանաչ գրքերը կարող ենք իրար մեջ վերադասավորել $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ եղանակով, 2 կարմիրները՝ $2 \cdot 1 = 2$ եղանակով, իսկ 2 կապույտները կրկին $2 \cdot 1 = 2$ եղանակով: Ընդհանուր դասավորությունների քանակը ստացվում է $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$:

13. Գրատախտակին գրված են $1, 2, \cdots, 10$ թվերը: Արամն ընտրում է երկու թիվ, և դրանք փոխարինում դրանց տարբերության մոդուլով: Այնուհետև նա նույն բանը կատարում է նոր գրված թվերի հետ այնքան, մինչև գրատախտակին մնա գրված մեկ թիվ: Գտե՛ք, թե ի՞նչ թիվ է գրված:

1) 1 2) 9 3) 3 4) պատասխանը միարժեք չէ

Լուծում. Գտնենք երկու եղանակ, որոնց արդյունքում ստացվում են տարբեր թվեր: Առաջին դեպքում խմբավորենք հետևյալ կերպ. $(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10)$, գործողություններից հետո կստանանք $1, 1, 1, 1, 1$: Որից հետո այսպես. $((1, 1), (1, 1)), 1$, կմնա $0, 1$, որից էլ կմնա 1:

Երկրորդ դեպքում անենք այսպես. $(1,\ 10),\ (2,\ 3),\ (4,\ 5),\ (6,\ 7),\ (8, 9)$, թվերը կդառնան $9,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$, որից հետո կարող է դառնալ $9,\ 0,\ 0$, և վերջում կմնա 9:
Այսպիսով, պատասխանը միարժեք չէ:

14. Թվի կրկնապատիկն ունի 20 տարբեր բաժանարար: Ամենաշատը քանի՞ բաժանարար կարող է ունենալ այդ թիվը:

1) 10 2) 16 3) 19 4) այլ պատասխան

Լուծում. Քանի որ թվի կրկնապատիկն ունի նույն բաժանարարները, ինչ այդ թիվը, բացի այդ բաժանվում է այդ թվի կրկնապատիկին, ուրեմն կրկնապատիկի բաժանարարների քանակը գոնե 1-ով մեծ է թվի բաժանարարների քանակից, այսինքն այն կունենա առավելագույնը 19 բաժանարար: Բերենք օրինակ. 2^{18} թվի կրկնապատիկը 2^{19} թիվն է, որի բաժանարարները $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^{19}$ թվերն են, որոնց քանակը 20 է, իսկ 2^{18} թիվը բաժանվում է բոլոր այդ թվերին, բացի 2^{19}-ից, այսինքն դրա բաժանարարների քանակն էլ 19 է:

15. Խանութը բացվելու 2-րդ տարում ունեցավ 100%-ով ավելի վաճառք, քան առաջին տարում, իսկ երրորդ տարում՝ 50%-ով ավելի, քան երկրորդ տարում: Քանի՞ տոկոսով պետք է չորրորդ տարում վաճառքը գերազանցի երրորդ տարվա վաճառքին, որպեսզի չորրորդ տարվա վաճառքը կազմի երկրորդ տարվա վաճառքի եռապատիկը:

1) 50% 2) 100% 3) $66.(6)\%$ 4) 75%

Լուծում. Առաջին տարվա վաճառքը նշանակենք x-ով: Երկրորդ տարվանը 100%-ով ավելի է, այսինքն $2x$ է: Երրորդ տարվանը երկրորդ տարվանից 50%-ով ավելի է, այսինքն $3x$ է: Որպեսզի չորրորդ տարվա վաճառքը կազմի երկրորդ տարվա վաճառքի եռապաիկը, այն պետք է լինի $3 \cdot 2x = 6x$, որը 3-րդ տարվա վաճառքից շատ է 100% -ով:

16. Դիցուք x_1 և x_2 թվերը $3x^2 - 12x + 6$ քառակուսային եռանդամի արմատներն են: Գտե՛ք $x_1^3 + x_2^3$-ի արժեքը:

Լուծում. Քանի որ $3x_1^2 - 12x_1 + 6 = 0$, ուրեմն $x_1^2 = 4x_1 - 2$, նույնը կարող ենք ասել x_2-ի մասին: Համաձայն Վիետի թեորեմի $x_1 + x_2 = 4,\ x_1x_2 = 2$: Ձևափոխենք պահանջվող արտահայտությունը

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(4x_1 - 2 - x_1x_2 + 4x_2 - 2) =$$
$$= (x_1 + x_2) \cdot (4(x_1 + x_2) - 4 - x_1x_2) = 4 \cdot (16 - 4 - 2) = 40:$$

Պատասխան՝ 40:

17. Եռանկյան $A,\ B$ և C գագաթներին հարակից արտաքին անկյունների աստիճանային չափերը հարաբերում են ինչպես $2:3:4$: Գտե՛ք եռանկյան B ներքին անկյան աստիճանային չափը:

Լուծում. Քանի որ եռանկյան արտաքին անկյունների գումարը հավասար է 360°, ուրեմն B գագաթի արտաքին անկյունը հավասար է $3 \cdot 360^\circ : 9 = 120^\circ$, ուրեմն B ներքին անկյունը հավասար է $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$:

Պատասխան՝ 60°:

18. Գտե՛ք փոքրագույն բնական թիվը, որը 5-ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը, ինչ այդ թվի կրկնապատիկն 8-ի բաժանելիս:

Լուծում. Դիցուք թիվը հավասար է $5a + r$: Դրա կրկնապատիկը 8-ի բաժանելիս տալիս է նույն r մնացորդը, ուրեմն կարող ենք գրել $2(5a + r) = 8b + r$, որը ձևափոխելով կստանանք $10a + r = 8b$: Այստեղից հասկանում ենք, որ r-ը զույգ թիվ է, և քանի որ այն 5-ի բաժանելիս ստացվող մնացորդն է, այն կարող է լինել $0,\ 2,\ 4$: Յուրաքանչյուր դեպքում պետք է գտնել փոքրագույն a-ն, որը հավասարման լուծում է:

$r = 0 \Rightarrow 10a + 0 = 8b \Rightarrow a = 4$, այսինքն թիվը կլինի $5a + r = 20$:

$r = 2 \Rightarrow 10a + 2 = 8b \Rightarrow a = 3$, այսինքն թիվը կլինի $5a + r = 17$:

$r = 4 \Rightarrow 10a + 4 = 8b \Rightarrow a = 2$, այսինքն թիվը կլինի $5a + r = 14$:

Պատասխան՝ 14:

19. Քանի՞ եռանիշ թիվ կա, որ բաժանվում է 3-ի կամ 7-ի:

Լուծում. 3-ի բաժանվող եռանիշ թվերն են $3 \cdot 34,\ 3 \cdot 35,\ \ldots,\ 3 \cdot 333$, որոնց քանակը $333 - 33 = 300$ է, իսկ 7-ի բաժանվողներն են $7 \cdot 15,\ 7 \cdot 16,\ 7 \cdot 17,\ \ldots,\ 7 \cdot 142$ թվերը, որոնց քանակը $142 - 14 = 128$ է: Իսկ այն թվերը, որոնք բաժանվում են և 3-ի, և 7-ի՝ $21 \cdot 5,\ 21 \cdot 6,\ \ldots,\ 21 \cdot 47$-ն են, որոնց քանակը $47 - 4 = 43$ է: Այսպիսով այն թվերը, որոնք բաժանվում են 3-ի կամ 7-ի $300 + 128 - 43 = 385$ հատ են:

Պատասխան՝ 385:

20. Հաշվե՛ք բոլոր երկնիշ թվերի գումարը, որոնց թվանշանների արտադրյալը 2-ով փոքր է դրա թվանշանների գումարի կրկնակիից:

Լուծում. Եթե $\overline{ab}$ երկնիշ թիվը բավարարում է խնդրի պայմանին, ապա $ab = 2(a + b) - 2$, որը ձևափոխելով կստանանք $(a - 2)(b - 2) = 2$: Այս պայմանը կարող է բավարարվել 3 դեպքում՝ $1)\ a = 3,\ b = 4,\ 2)\ a = 4,\ b = 3,\ 3)\ a = 1,\ b = 0$: Ստացված թվերի գումարը $43 + 34 + 10 = 87$ է:

Պատասխան՝ 87: