Լուծումներ
11-12 դասարաններ

Խնդիր 1: Պատասխան: 14
Լուծում: Գրատախակին կա գրված գոնե երկու թիվ, որոնք բաժանվում են 3-ի, որովհետև ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներից մեկը 3 է: Եթե գրատախտակին լիներ գոնե երեք հատ թիվ, որոնք բաժանվում են 3-ի, ապա նրանց զույգ առ զույգ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներից գոնե 3-ը պետք է բաժանվեն 3-ի, բայց $1, 2, 3, 4, 5, N$ թվերից ամենաշատը 2-ը կարող են բաժանվել 3-ի, հետևաբար գրատախակի վրա գրված թվերից ճիշտ 2-ն են բաժանվում 3-ի, իսկ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներից էլ ճիշտ մեկն է բաժանվում 3-ի, հետևաբար N-ը չի բաժանվում 3-ի: Նույն ձև կարող ենք ստանալ, որ N-ը չի բաժանվում 5-ի: Եթե գրատախտակին գրված լիներ ամենաշատը երկու զույգ թիվ, ապա ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներից ամենաշատը մեկը կարող էր լինել զույգ, ինչը այդպես չէ: Մյուս կողմից էլ գրատախտակին չի կարող գրված լինել չորս հատ զույգ թիվ, որովհետև բոլոր ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարները կլինեին զույգ: Նշանակում է գրատախկին գրված է ճիշտ երեք հատ զույգ թիվ, որտեղից էլ կստացվի, որ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներից ճիշտ երեքը զույգ են, ինչը նշանակում է, որ N-ը զույգ է: Նկատենք նաև, որ գրատախտակին գրված երեք զույգ թվերից գոնե երկուսը բաժանվում են 4-ի, որովհետև ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներից մեկը 4-ն է: Մյուս կողմից չեն կարող երեք զույգ թվերն էլ բաժանվեն 4-ի, որովհետև ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներից մեկը 2-ն է, այսինքն գրատախտակի վրա գրված զույգ թվերից մեկը բաժանվում է 2-ի, իսկ երկուսը 4-ի, իսկ նրանց ամենամեծ ընդահուր բաժանարարներից մեկը կբաժանվի 4-ի, իսկ երկուսը 2-ի, հետևաբար N-ը չի բաժանվում 4-ի: Ամփոփելով այս ամենը ստացվում է, որ $N > 5$ ամբողջ թիվը չի բաժանվում 3-ի, 4-ի, 5-ի և բաժանվում է 2-ի, իսկ այս պայմաններին բավարարող ամենափոքր ամբողջ թիվը 14-ն է: Մնաց կառուցենք օրինակ $N = 14$-ի համար: Գրատախտակի վրա գրված թվերը վերցնենք $4, 15, 42, 140$ և համոզվենք, որ նրանք բավարարում են պայմաններին՝

$$(4, 15) = 1, (4, 42) = 2, (15, 42) = 3, (4, 140) = 4, (15, 140) = 5, (42, 140) = 14$$

Խնդիր 2: Պատասխան: $k = \lceil \frac{n-11}{3} \rceil$
Լուծում: Սկզբում ապացուցենք, որ ցանկացած 12 հատ հատվածներից հնարավոր է ընտրել 3-ը որոնցով հնարավոր է կառուցել եռանկյուն: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն գոյություն ունի 12 հատ հատված որոնցից չենք կարող կառուցել եռանկյուն: $b_1, b_2, b_3, ...b_{12}$ ով նշանակենք տվյալ հատվածների երկարությունը: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք $b_1 \leq b_2 \leq b_3... \leq b_{12}$: Նկատենք, որ ըստ մեր ենթադրության $b_{m+2} > b_{m+1} + b_m$, որտեղ $1 \leq m \leq 10$: Կստանանք

$$\begin{aligned}100 \geq b_{12} &\geq b_{11} + b_{10} \geq 2b_{10} + b_9 \geq 3b_9 + 2b_8 \geq 5b_8 + 3b_7 \geq 8b_7 + 5b_6 \geq 13b_6 + 8b_5 \\ &\geq 21b_5 + 13b_4 \geq 34b_4 + 21b_3 \geq 55b_3 + 34b_2 \geq 89b_2 + 55b_1 \geq 144\end{aligned}$$

ինչը սխալ է, հետևաբար հակասող ենթադրությունը սխալ էր: Քանի որ ամեն 12 հատվածներից, որևէ 3-ով կարող ենք կառուցել եռանկյուն, ապա չօգտագործված հատվածներից անընդհատ կարող ենք կառուցել եռանկյուններ քանի դեռ չօգտագործված հատվածների քանակը փոքր չի 12-ից, նշանակում է կարող ենք կառուցել գոնե $\lceil \frac{n-11}{3} \rceil$ հատ եռանկյուն: Մնաց ցույց տանք օրինակ, որից կարող

ենք կառուցել ճիշտ $\lceil\frac{n-11}{3}\rceil$ եռանկյուն։ Վերցնենք $3\lceil\frac{n-11}{3}\rceil$ հատ 1 երկարությամբ հատվածներ, իսկ մնացած $n-3\lceil\frac{n-11}{3}\rceil$ հատվածների երկարությունները ընտրենք $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89$ թվերից որևէ կերպ (1 երկարությամբ հատված կարող ենք ընտրել երկու անգամ)։ Դժվար չի համոզվել, որ կառուցվող եռանկյունների քանակը հենց $\lceil\frac{n-11}{3}\rceil$ հատ է։

Խնդիր 3:

Լուծում: Քանի, որ R-ը A կետի համաչափ կետն է BC ողղի նկատմամբ, ապա $AK=KR$, որտեղից էլ $\angle KAR=\angle KRA$։ Քանի որ $\angle KDA=\angle KTA=90°$ անկյունները հենված են AK հատվածի վրա, հետևաբար $KDTA$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, որտեղից էլ կստանանք $\angle KAD=\angle KTD$։ $\angle KRA=\angle KAD=\angle KTD=\angle KTP$, հետևաբար $HTRP$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ։ $\angle AFH=\angle AEH=\angle HTA=90°$, հետևաբար $AFHTE$ հնգանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ։
Ցույց տանք, որ $MDFE$ քառանկյանը ևս կարելի է արտագծել շրջանագիծ։ $\gamma=\angle ACB$, $\angle EBC=90°-\gamma$, քանի որ M-ը BEC ուղղանկյուն եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է, հետևաբար $\angle EMC=2\angle EBC=180°-2\gamma$, որտեղից էլ $\angle DME=2\gamma$։ $\angle AFC=\angle ADC=90°$ հետևաբար $AFDC$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, որտեղից էլ կստանանք $\angle ACB=180°-\angle AFD=\angle BFD=\gamma$, նույն ձև կարող ենք ստանալ նաև $\angle ACB=\angle AFE=\gamma$։ $\angle EFD=180°-\angle AFE-\angle BFD=180°-2\gamma$, և $\angle EFD+\angle DME=180°-2\gamma+2\gamma=180°$, հետևաբար $MDFE$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ։
Քանի որ $FHTE, MDFE, HTRP$ քառանկյուններին կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ապա $KP\cdot KR=KH\cdot KT=KF\cdot KE=KD\cdot KM$ հետևաբար $DPRM$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ։

Խնդիր 4:

Լուծում:

Լեմմա: Տրված $x>0$ իրական թվի և n դրական ամբողջ թվի համար տեղի ունի

$$2^{n-1}(1+x^n)\geq(1+x)^n$$

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք ինդուկցիայի օգնությամբ։ $n=1$ դեպքում կստացվի $1+x\geq 1+x$, որը ճիշտ է։ Ենթադրենք լեմման ճիշտ է $n=k$ դեպքի համար, ցույց տանք որ այն նաև ճիշտ կլինի $n=k+1$ դեպքի համար։ Ըստ ինդուկցիոն ենթադրության ունենք $2^{k-1}(1+x^k)\geq(1+x)^k$։ Կստանանք

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)(1+x)^k\leq 2^{k-1}(1+x)(1+x^k) \tag{1}$$

Ցույց տանք որ

$$2^{k-1}(1+x)(1+x^k)\leq 2^k(1+x^{k+1}) \tag{2}$$

Փակագծերը բացելով և նման անդամների կրճատումներ անելուց հետո կարող ենք ստանալ

$$x+x^k\leq 1+x^{k+1}$$

որտեղից էլ կարող ենք ստանալ

$$0\leq(1-x)(1-x^k)$$

որը ճիշտ է, հետևաբար ճիշտ է նաև (4)-ը։ $(3),(4)$-ից էլ կարող ենք ստանալ

$$(1+x)^{k+1}\leq 2^{k-1}(1+x)(1+x^k)\leq 2^k(1+x^{k+1})$$

ինչը ուզում էինք ապացուցեինք: $n = k$ դեպքի ճիշտ լինելուց ապացուցեցինք, որ լեմման ճիշտ կլինի $n = k + 1$ դեպքի համար, հետևաբար լեմման ճիշտ է բոլոր n-երի համար:

Վերադառնանք սկզբնական խնդրին, օգտվելով լեմմայից կստանանք

$$\begin{aligned}
\frac{1+a^n}{1+b} + \frac{1+b^n}{1+c} + \frac{1+c^n}{1+a} &\geq 2^{1-n}\left(\frac{(1+a)^n}{1+b} + \frac{(1+b)^n}{1+c} + \frac{(1+c)^n}{1+a}\right) \\
&\geq 3 \cdot 2^{1-n}\sqrt[3]{(1+a)^{n-1}(1+b)^{n-1}(1+c)^{n-1}} \\
&\geq 3 \cdot 2^{1-n}\sqrt[3]{2^{n-1}a^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1}b^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1}c^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

այսպիսով խնդիրը ապացուցվեց: