Մաթեմատիկա առարկայի օլիմպիադայի դպրոցական փուլ
2025-2026 ուստարի, 11-12-րդ դասարան
Տևողությունը – 2 ժամ 30 րոպե

1. $A = log_5 7 + log_7 5$ և $B = 2\,log_6 6$ թվերի համար ո՞րն է ճիշտ.
   1) $A > B$ 2) $A < B$ 3) $\frac{A+B}{2} < \sqrt{AB}$ 4) $\frac{A+B}{2} = \sqrt{AB}$

   Լուծում. $A = log_5 7 + log_7 5 = log_5 7 + \frac{1}{log_5 7} > 2 = 2 = 2 \cdot log_6 6 = B$:

   Պատասխան՝ $A > B$:

2. Գտնել $sin(cos(2sin(3x)))$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:
   1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{2\pi}{3}$ 4) π

   Լուծում. Նախ ապացուցենք, որ $\frac{\pi}{3}$-ը հանդիսանում է $sin(cos(2sin(3x)))$ ֆունկցիայի պարբերություն՝

   $sin(cos(2sin(3(x + \frac{\pi}{3})))) = sin(cos(2sin(3x + \pi))) = sin(cos(-2sin(3x))) = sin(cos(2sin(3x)))$:

   Հեշտորոն կարելի է ապացուցել նաև, որ $\frac{\pi}{3}$ -ը հանդիսանում է ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը:

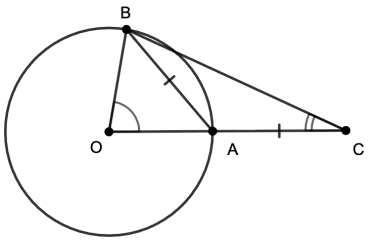
   Պատասխան՝ $\frac{\pi}{3}$:

3. Քանի՞ վեցանիշ կենտ թիվ կարելի է կազմել օգտագործելով ճիշտ մեկ հատ 3, մեկ հատ 5 և չորս հատ 7:
   1) 0 2) 30 3) 729 4) այլ պատասխան

   Լուծում. Նկատենք, որ չորս հատ 7 թվանշանները կարող են գտնվել 6-անիշ թվի մեջ $\binom{6}{4} = 15$ տարբեր դիրքերում: Մնում է մեկ հատ 3-ը և մեկ հատ 5-ը տեղավորել մնացած երկու դիրքում, որը կարող ենք անել 2 եղանակով: Ստացվեց ընդհանուր $15 \cdot 2 = 30$ վեցանիշ կենտ թիվ:

   Պատասխան՝ 30:

4. Շրջանագծի վրա AB փոքր աղեղի աստիճանային չափը հավասար է 80°: OA շառավղի շարունակության վրա C կետը նշված է այնպես որ $AB = AC$: Գտնել $\angle ACB$-ն:
   1) 40° 2) 30° 3) 17° 4) 25°



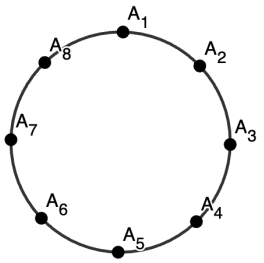
   Լուծում. $\angle ACB = \frac{\angle BAO}{2} = \frac{180^\circ - \angle BOA}{4} = 25^\circ$:

   Պատասխան՝ 25°:

5. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր $1, 2, \cdots, 8$ թվերը դասավորել շրջանաձև այնպես, որ 1-ը և 2-ը հարևան չլինեն: Երկու դասավորություններ կհամարենք նույնը, եթե կարելի է մեկից մյուսը ստանալ պտույտի միջոցով:

1) 3600 2) 4320 3) 30240 4) այլ պատասխան

Լուծում. Դիտարկենք $1, 2, \cdots, 8$ թվերի որևէ շրջանաձև դասավորություն, ինչպես ցույց է տրված նկարում: Քանի որ պտույտի միջոցով մեկից մյուսը դասավորությունները համարվում են նույնը՝ առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ A_1 դիրքում գտնվում է 8 թիվը: Նկատենք, որ այս դեպքում մնացած $1, 2, \cdots, 7$ թվերը 8-ի շուրջ շրջանաձև դասավորելը համարժեք է գծային դեպքին, և տարբերակների քանակը հավասար է $7! = 5040$: Մնում է հանել այն դեպքերը, երբ 1-ը և 2-ը իրար հարևան են, որոնց քանակը հաշվելու համար «սոսնձենք» 1 և 2 թվերը՝ համարելով մեկ «թիվ», ընդ որում դա կարող ենք անել 2 եղանակով (1-ը հաջորդում է 2-ին ժամսլաքի ուղղությամբ և հակառակը): Խնդիրը բերվում է $1, 2, \cdots, 6$ թվերի գծային դասավորելու խնդրին, որը կարող ենք անել $6! = 720$ տարբեր ձևով: Ստացվեց ընդհանուր $7! - 2 \cdot 6! = 3600$ տարբերակ:



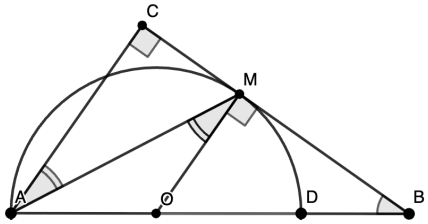
Պատասխան՝ 3600:

6. Գտնել բոլոր $y = x^2 + px + q$ պարաբոլաների ընդհանուր հատման կետի կոորդինատների գումարը, որտեղ $p + q = 2025$:
1) 2026 2) 2027 3) 1013 4) այլ պատասխան

Լուծում. Տեղադրելով քառակուսային եռանդամի մեջ $x = 1$՝ կստանանք $y = 1 + p + q = 2026$: Ստացվեց, որ խնդրում նշված բոլոր պարաբոլները հատվում են $(1, 2026)$ կետում:

Պատասխան՝ 2027:

7. Տրված է C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյունը: AD տրամագծով կիսաշրջանագիծը շոշափում է ABC եռանկյան BC կողմը M կետում, որտեղ D կետը պատկանում է AB-ին: Հայտնի է, որ $\angle CBA = 12^\circ$: Գտնել $\angle CAM$-ի աստիճանային չափը:
1) 39° 2) 78° 3) 45° 4) այլ պատասխան



Լուծում. Նշանակենք կիսաշրջանագծի կենտրոնը O-ով: Քանի որ կիսաշրջանագիծը շոշափում է BC կողմը, ապա $OM \perp BC$, որտեղից կարող ենք ասել, որ $OD \parallel AC$: Ստացվեց՝ $\angle CAM = \angle AMO = \frac{\angle MOB}{2} = \frac{90^\circ - \angle CBA}{2} = 39^\circ$:

Պատասխան՝ 39°:

8. Գտնել 2025-ից փոքր n բնական թվերի քանակը, որոնց համար $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ թիվը ավարտվում 0-ով:
1) 0 2) 1518 3) 1519 4) 2025

Լուծում. Նշանակենք $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$-ն m-ով: Նկատենք, որ բոլոր բնական n-երի համար $m \vdots 2$: Ստացվեց, որպեսզի m-ը ավարտվի 0-ով՝ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $m \vdots 5$: Հեշտ կարելի է ստուգել, որ m-ը չի բաժանվում 5-ի այն և միայն այն դեպքերում, երբ $n \vdots 4$, որտեղից էլ ստացվում է, որ նման n բնական թվերի քանակը հավասար է $2024 - \lfloor \frac{2024}{4} \rfloor = 1518$:

Պատասխան՝ 1518:

9. Հաշվել $cos(30^\circ) + cos(102^\circ) + cos(174^\circ) + cos(246^\circ) + cos(318^\circ)$ արտահայտության արժեքը:

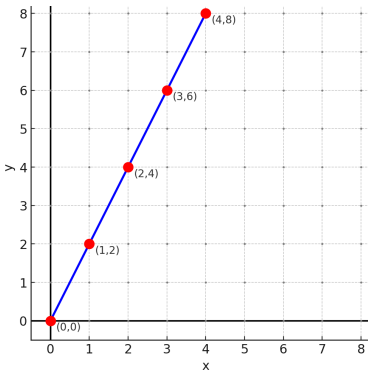
1) -0.5 2) 0 3) 0.5 4) 1

Լուծում. Օգտագործելով եռանկյունաչափական հայտնի առնչությունները, կստանանք՝

$$cos(30^\circ) + (cos(102^\circ) + cos(318^\circ)) + (cos(174^\circ) + cos(246^\circ)) =$$
$$cos(30^\circ) + 2cos(210^\circ)cos(108^\circ) + 2cos(210^\circ)cos(36^\circ) =$$
$$cos(30^\circ) \cdot (1 - 2 \cdot (cos(108^\circ) + cos(36^\circ)) = cos(30^\circ) \cdot (1 - 4 \cdot cos(36^\circ)cos(72^\circ)) =$$
$$cos(30^\circ) \cdot (1 - 4 \cdot \frac{sin(36^\circ)cos(36^\circ)cos(72^\circ)}{sin(36^\circ)}) = cos(30^\circ) \cdot (1 - \frac{sin(144^\circ)}{sin(36^\circ)}) = 0$$

Պատասխան՝ 0:

10. Գտնել $(0, 0)$; $(8, 8)$ քառակուսային ցանցում (տես նկարը) այն ուղղանկյունների քանակը, որոնց գոնե մեկ գագաթը գտնվում է $y = 2x$ ուղղի վրա և կողմերը զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:



1) 310 2) 319 3) 320 4) այլ պատասխան

Լուծում. Նկատենք, որ ուղղանկյան ընտրությունը կարելի է փոխարինել ուղղանկյան որևէ անկյունագծային գագաթների զույգով: Մնում է հաշվել անկյունագծային գագաթների ոչ կարգավորված զույգերի քանակը, որ զույգի գագաթներից մեկը $y = 2x$ ուղղի վրա է: Նախ հաշվենք այն դեպքերը, որտեղ գագաթներից մեկը $y = 2x$ ուղղի վրա է, իսկ մյուսը ոչ: Այդպիսի դեպքերը քանակը $5 \cdot (81 - 2 \cdot 8 - 5) = 300$ է՝ բացառելով այն դեպքերը, երբ զույգը գտնվում է միևնույն ուղղի վրա: Տարբերակների քանակը, երբ անկյունագծային զույգի երկու գագաթն էլ գտնվում են $y = 2x$ ուղղի վրա հավասար է $\binom{5}{2} = 10$: Այսպիսով ունեցանք ընդհանուր ուղղանկյան անկյունագծային զույգ ընտրելու 310 տարբերակ:

Պատասխան՝ 310:

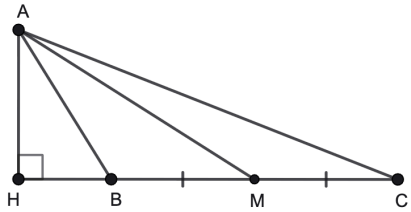
11. Հաշվել $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)(x^{16} + 1)(x - 1) + 1$ բազմանդամի բոլոր միանդամների գործակիցների գումարը:

1) 0 2) 16 3) 256 4) այլ պատասխան

Լուծում. Նկատենք, որ $P(x) = x^{32} - 1 + 1 = x^{32}$, որի բոլոր միանդամների գործակիցների գումարը հավասար է 1-ի:

Պատասխան՝ 1:

12. B բութ անկյունով ABC եռանկյան մեջ A գագաթից BC կողմին տարված են AM միջնագիծը և AH բարձրությունը, ընդ որում $AH = \sqrt{5}$, $AM = \sqrt{14}$, $AB = 3$: Գտնել AC կողմի



երկարությունը:

1) $\sqrt{23}$ 2) 5 3) $\sqrt{19}$ 4) $\sqrt{21}$

Լուծում. Պյութագորասի թեորեմից հետևում է, որ $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 2$, $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 3 \Rightarrow BM = MC = 1 \Rightarrow HC = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{21}$:

Պատասխան՝ $\sqrt{21}$:

13. ABC եռանկյան AH բարձրությունը կիսում է եռանկյան $\angle BAC$ անկյունը $1:2$ հարաբերությամբ, իսկ հիմքը բաժանում է մասերի՝ ընդ որում փոքր մասի երկարությունը 3 է: Հայտնի է նաև, որ $AH = 6$: Գտնել $\triangle ABC$-ի մակերեսը:

1) $\frac{117}{5}$ 2) 33 3) $\frac{129}{4}$ 4) 24

Լուծում. Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ $BH < CH$: Նշանակենք $\angle BAH$ անկյունը α-ով: Կունենանք, որ՝

$$tg(\alpha) = \frac{BH}{AH} = 0.5 \Rightarrow tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)} = \frac{4}{3}$$

Կունենանք, որ $CH = AH \cdot tg(2\alpha) = 8 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 33$:

Պատասխան՝ 33:

14. $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_6\}$ բազմության X, Y ենթաբազմությունները բավարարում են $|X \cap Y| = 2$ պայմանին: Գտնել այդպիսի ենթաբազմությունների բոլոր հնարավոր (X, Y) կարգավորված զույգերի քանակը:

1) 243 2) 405 3) 1215 4) այլ պատասխան

Լուծում. Նկատենք, որ $X \cap Y$ բազմության բոլոր հնարավոր տարբերակների քանակը հավասար է $\binom{6}{2} = 15$: Մյուս կողմից, քանի որ $|X \cap Y| = 2$, ապա $|A \setminus (X \cap Y)| = 4$, և այդ բազմության յուրաքանչյուր տարր պատկանում է կամ միայն A-ին, կամ միայն B-ին, կամ ոչ A-ին և ոչ B-ին: Ստացվեց ընդհանուր տարբերակների քանակը $\binom{6}{2} \cdot 3^4 = 1215$:

Պատասխան՝ 1215:

15. Շրջանագծի վրա նշված են 10 իրարից տարբեր կետեր: Քանի՞ ուռուցիկ բազմանկյուն կա, որոնց գագաթները նշված կետերից են և բազմանկյունը ունի առնվազն երեք գագաթ:

1) 849 2) 968 3) 1024 4) այլ պատասխան

Լուծում. Ակնհայտ է, որ միևնույն գագաթների խմբով կարելի է կազմել ճիշտ մեկ ուռուցիկ բազմանկյուն, որտեղից էլ կարող ենք բազմանկյունների քանակը հաշվելու փոխարեն հաշվել երեք և ավել գագաթ պարունակող գագաթների խմբերի քանակը, որն էլ հավասար է՝ $2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} = 968$:

Պատասխան՝ 968:

16. Հայտնի է, որ $tg(\alpha) + tg(\beta) = 14$, $ctg(\alpha) + ctg(\beta) = 16$: Հաշվել $tg(\alpha + \beta)$:

Լուծում. $ctg(\alpha) + ctg(\beta) = \frac{1}{tg(\alpha)} + \frac{1}{tg(\beta)} = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{tg(\alpha)tg(\beta)} = \frac{14}{tg(\alpha)tg(\beta)} = 16 \Rightarrow$ $tg(\alpha)tg(\beta) = \frac{7}{8}$: Օգտվելով $tg(\alpha + \beta)$-ի բանաձևից, կարող ենք ասել, որ՝

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)} = 112:$$

Պատասխան՝ 112:

17. $A = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \cdots (1 - \frac{1}{2025})$, որտեղ հայտարարները հաջորդական լրիվ քառակուսիներ են: Հաշվել A-ն անկրճատելի կոտորակի տեսքով ներկայացնելուց հետո համարիչի և հայտարարի գումարը:

Լուծում. Դիտարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ $A = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$ և ապացուցենք, որ $A = \frac{n+1}{2n}$: Ապացույցը վարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի միջոցով:

$n = 2$. Այս դեպքում պնդումը ակնհայտ է:

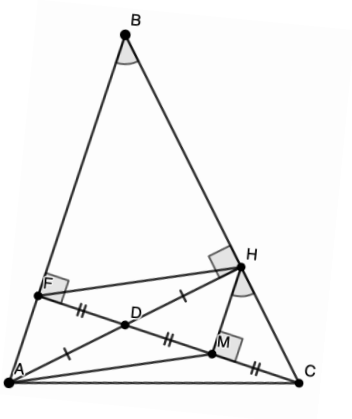
Ենթադրենք, որ պնդումը ճիշտ է $n = k$-ի համար, և ապացուցենք $n = k + 1$-ի համար՝

$$A = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \cdots (1 - \frac{1}{k^2})(1 - \frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)},$$

ինչը, որ անհրաժեշտ էր ապացուցել: Մասնավորապես երբ $n = 45$ կստանանք, որ $A = \frac{23}{45}$:

Պատասխան՝ 68:

18. ABC եռանկյան մեջ տարված են AH և CF բարձրությունները, որոնք հատվում են D կետում այնպես, որ $AD = DH$ և $DC = 2 \cdot FD$: Հաշվել $\angle ABC$ անկյան աստիճանային չափը:



Լուծում. Նշանակենք DC հատվածի միջնակետը M-ով: Կունենանք, որ $FD = DM = MC$, որտեղից էլ ստացվում է, որ $AFHM$-ը զուգահեռագիծ է, քանի որ $AD = DH$, $FD = DM$: Հետևաբար $BF \parallel HM$ և $HM \perp DC$: Ստացվեց, որ HM-ը DC-ի միջնուղղահայացն է, հետևաբար $\angle ABC = \angle MHC = 45^\circ$:

Պատասխան՝ 45°:

19. Տրված է $f(x)=\frac{6\cdot 27^x}{3+27^x}$ ֆունկցիան: Հաշվել $f(\frac{1}{99})+f(\frac{2}{99})+\cdots+f(\frac{65}{99})$ արտահայտության արժեքը:

Լուծում. Նախ կամայական $i=1,\ 2,\cdots,33$ համար հաշվենք՝

$$f(\tfrac{i}{99})+f(\tfrac{66-i}{99})=\frac{6\cdot 27^{\frac{i}{99}}}{3+27^{\frac{i}{99}}}+\frac{6\cdot 27^{\frac{66-i}{99}}}{3+27^{\frac{66-i}{99}}}=\frac{6\cdot 27^{\frac{i}{99}}}{3+27^{\frac{i}{99}}}+\frac{6\cdot 27^{\frac{66}{99}}}{3\cdot 27^{\frac{i}{99}}+27^{\frac{66}{99}}}=\frac{6\cdot 27^{\frac{i}{99}}+18}{3+27^{\frac{i}{99}}}=6:$$

Օգտագործելով, որ $f(\frac{i}{99})+f(\frac{66-i}{99})=6$, կստանանք՝

$$f(\tfrac{1}{99})+f(\tfrac{2}{99})+\cdots+f(\tfrac{65}{99})=6\cdot 32+3=195$$

Պատասխան՝ 195:

20. Քանի՞ զրոյով է վերջանում $16^{5^{4!}}+14^{5^{6!}}$ արտահայտության արժեքը:

Լուծում. a բնական թվի և p պարզ թվի համար նշանակենք $V_p(a)$-ով այն ամենամեծ k ոչ բացասական ամբողջ թիվը, որ $a\ \vdots\ p^k$: Նկատենք, որ կամայական n բնական թվի գրության վերջում 0-ների քանակը հավասար է $min\{V_2(n),\ V_5(n)\}$: Հարմարության համար $16^{5^{4!}}+14^{5^{6!}}$ թիվը նշանակենք m-ով: Քանի որ $m=2^{5^{4!}}(8^{5^{4!}}+7^{5^{6!}}\cdot 2^{5^{6!}-5^{4!}})$, կարող ենք ասել որ $V_2(m)>5^{4!}$: Մյուս կողմից՝

$$m=(15+1)^{5^{4!}}+(15-1)^{5^{6!}}=15^{5^{4!}}+\cdots+15\cdot 5^{4!}+1+15^{5^{6!}}+\cdots+15\cdot 5^{6!}-1=$$
$$15\cdot 5^{4!}(1+5^{6!-4!}\cdot a),\ \text{որտեղ}\ a\in N:$$

Ստացվեց $V_5(m)=1+4!=25$: Քանի որ $V_2(m)>5^{24}$, $V_5(m)=25$, կարող ենք ասել, որ m թվի գրության վերջում 0-ների քանակը հավասար է $min\{V_2(m),\ V_5(m)\}=25$:

Պատասխան՝ 25: