Լուծումներ

11-12-րդ դասարաններ

Խնդիր 1: Լուծում: $(1+a)(1+b)=2$ արտահայտությունը ձևափոխելով՝ ստանում ենք $a+b=1-ab$ հավասարությունը: Երկու կողմն էլ քառակուսի բարձրացնելով կունենանք $(a+b)^2=(1-ab)^2$: Մյուս կողմից, $(a+b)^2\geq 4ab$, քանի որ $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0$: Ուրեմն $(1-ab)^2\geq 4ab$: Վերջին անհավասարությունը ձևափոխելով՝ ստանում ենք $(ab)^2+1\geq 6ab$: Վերջապես երկու կողմն էլ ab-ի վրա բաժանելուց հետո (կարող ենք բաժանել, քանի որ ab-ն դրական է) ստանում ենք պահանջվող անհավասարությունը՝ $ab+\frac{1}{ab}\geq 6$:

Խնդիր 2: Պատասխան: 5

Լուծում: Դիցուք $p-1=a^2$ և $2p^2-1=b^2$: Հեշտ է նկատել, որ $a<p$ և $b<2p$:

$$(b-a)(b+a)=b^2-a^2=2p^2-1-(p-1)=p(2p-1)\ ^*$$

Ուրեմն $(b-a)(b+a)\ \vdots\ p$: Քանի որ p-ն պարզ է, ունենք երկու դեպք.

Առաջին դեպք: $b-a\ \vdots\ p$

Դիցուք $b-a=k\cdot p$:

$$k\cdot p=b-a<b+a=\frac{2p-1}{k}$$

Ուրեմն $k=1$, այսինքն $b-a=p$ և $b+a=2p-1$: Լուծելով հավասարումների համակարգը՝ ստանում ենք $a=\frac{p-1}{2}$: Այստեղից $p-1=a^2=\frac{(p-1)^2}{4}\Rightarrow p=5$:

Երկրորդ դեպք: $b+a\ \vdots\ p$

$b+a<2p+p=3p\Rightarrow b+a=p$, կամ $b+a=2p$:

Սակայն, առաջին դեպքում ստանում ենք $b-a=2p-1>b+a$, իսկ երկրորդում՝ $b-a=\frac{2p-1}{2}\notin N$, ուստի երկու դեպքն էլ բերում են հակասության:

Մնում է միայն ստուգել, որ $p=5$-ն իրոք բավարարում է խնդրի պայմաններին.

$$5-1=4=2^2\qquad 2\cdot 5^2-1=49=7^2$$

Ուրեմն, 5-ը խնդրի պայմաններին բավարարող միակ պարզ թիվն է:

Խնդիր 3:

Լուծում: Դիցուք BX-ը հատում է AQ-ն T կետում, իսկ BQ-ն AP-ն՝ S'-ում: $\angle BAC$-ն նշանակենք α: $BP=CQ$, հետևաբար BP և CQ փոքր աղեղներն իրար հավասար են, ուստի BC և PQ փոքր աղեղները նույնպես կլինեն հավասար: Աստեղից՝ $\angle PAQ=\angle BAC=\alpha$:

$\angle BXP=\angle AXT=90^\circ-\alpha$ (երկրորդ հավասարությունը ստացվում է $\triangle AXT$-ից): Մյուս կողմից, $\angle BPA=\angle BQA=\angle BCA=90^\circ-\alpha$: Ուրեմն.

1) $\triangle XBP$-ը հավասարասրուն է,

2) $\triangle AS'Q$-ից՝ $\angle AS'Q=180^\circ-\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ\Rightarrow S'$-ը գտնվում է AQ տրամագծով շրջանագծի վրա, հետևաբար $S=S'$:

Ստացվեց, որ XP հիմքով XBP հավասարասրուն եռանկյան մեջ BS-ը բարձրություն է, հետևաբար նաև միջնագիծ է, ուստի $XS=SP$:

Խնդիր 4: Պատասխան: $[\frac{2^{n+1}}{3}]$

Լուծում: Ցանկացած m բնական թվի համար $f(m)$-ով նշանակենք m թվի պարզ վերլուծության մեջ 2-ի ցուցիչը (օրինակ՝ $f(60)=2$, քանի որ $60=2^2\cdot 3\cdot 5$):
Դիցուք $T=\{m\in\ \{1,2,...,2^n-1\}\mid f(m)$-ը կենտ է$\}$:
Պարզ է, որ $\forall a\ \in\ T$-ի համար խնդրի պայմանին բավարարող ցանկացած S բազմություն պարունակում է $(a,\frac{a}{2})$ թվազույգից առավելագույնը մեկ թիվ, ընդ որում նշված թվազույգերը զույգ առ զույգ հատում չունեն, հետևաբար $|S|\ \leq\ 2^n-1-|T|$: Մյուս կողմից $|T|\ =\ 2^{n-2}+2^{n-4}+...$, որտեղ 2^{n-2i}-ն ցույց է տալիս $2^{2i}\cdot k+2^{2i-1}$ տեսքի թվերի քանակը:
Երկրաչափական պրոգրեսիայի բանաձևից՝

$$2^n-1-2^{n-2}-2^{n-4}-...=2^n-1-\frac{2^{n-2}(1-\frac{1}{4^{[n/2]}})}{1-\frac{1}{4}}=2^n-1-\frac{2^n}{3}+\frac{2^n}{3\cdot 2^{2[\frac{n}{2}]}}=[\frac{2^{n+1}}{3}]$$

Կառուցենք օրինակ, որտեղ $|S|=[\frac{2^{n+1}}{3}]$:
Վերցնենք $S=\{m\in\ \{1,2,...,2^n-1\}\mid f(m)$-ը զույգ է$\}$:
Դիցուք $\exists\, a,b\in S$ այնպիսին որ $a-2b$-ն բաժանվում է 2^n-ի վրա:
Եթե $f(a)\neq f(2b)$, ապա ստանում ենք, որ $n\leq f(a-2b)=min\{f(a),f(2b)\}\leq f(a)<n$, ինչը հակասություն է, հետևաբար $f(a)=f(2b)=f(b)+1$, ուրեմն $f(a)$-ն և $f(b)$-ն տարբեր զույգության են, սակայն, ըստ S-ի սահմանման, դրանք երկուսն էլ զույգ են, ուստի կրկին եկանք հակասության: Ուրեմն նկարագրված բազմությունը բավարարում է խնդրի պայմաններին: Մյուս կողմից $S\bigsqcup T=\{1,2,...,2^n-1\}$, հետևաբար $|S|=[\frac{2^{n+1}}{3}]$: