1. Պայուսակում կան կարմիր և կապույտ մատիտներ, ընդ որում կապույտ են բոլոր մատիտների $\frac{3}{5}$-ը: Պայուսակում կարմիր մատիտների քանակը կրկնապատկում են: Դրանից հետո պայուսակում եղած մատիտների ո՞ր մասն է կարմիր:

1) $\frac{3}{5}$ 2) $\frac{3}{7}$ 3) $\frac{4}{5}$ 4) $\frac{4}{7}$

Պատասխան: 4)

Կարող ենք ընդհանրությունը չխախտելով համարել, որ ընդհանուր կա 3 կապույտ և 2 կարմիր մատիտ: Ուրեմն կրկնապատկելուց հետո կունենանք 3 կապույտ և 4 կարմիր մատիտ, հետևաբար կարմիր կլինեն բոլոր մատիտների $\frac{4}{7}$-ը:

2. Տրված են $x = 3^{(9^4)}$ և $y = 27^{(9^3)}$ թվերը: Հետևյալ պնդումներից, ո՞րն է ճիշտ

1) $x$ լրիվ քառակուսի է 2) $xy$ լրիվ քառակուսի է և լրիվ խորանարդ 3) $y$ լրիվ քառակուսի է 4) $y$ բաժանվում է $x$-ի վրա

Պատասխան: 2)

$xy = 3^{(9^4)} \cdot 3^{3\cdot(9^3)} = 3^{9^4+3\cdot 9^3}$: $9^4 + 3 \cdot 9^3$-ը բաժանվում է 2-ի և 3-ի, ուրեմն ճիշտ է երկրորդ պնդումը:

3. 50 հարցից բաղկացած թեստում յուրաքանչյուր ճիշտ պատասխանի համար աշակերտները ստանում են 4 միավոր, հարցին չպատասխանելու դեպքում՝ 0, իսկ սխալ պատասխանի դեպքում՝ $-1$: Հայտնի է, որ Աննան հավաքել է 99 միավոր: Գտնել Աննայի ճիշտ պատասխանների հնարավոր առավելագույն քանակը:

1) 25 2) 27 3) 29 4) 31

Պատասխան: 3)

Աննայի ճիշտ պատասխանների քանակը նշանակենք $a$, իսկ սխալ պատասխաններինը՝ $b$: Ուրեմն $4a - b = 99 \Rightarrow b = 4a - 99$: Մյուս կողմից $a + b \leq 50 \Rightarrow 5a - 99 \leq 50 \Rightarrow a \leq 29$: Նաև $(a, b) = (29, 17)$ թվազույգը բավարարում է պայմաններին, ուրեմն ճիշտ պատասխանների հնարավոր առավելագույն քանակը 29 է:

4. Տրված $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ թվերը բավարարում են $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = a_6 - a_5$, $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ և $a_4 + a_5 + a_6 = 19$: Գտնել $a_4 - a_1$ արտահայտության արժեքը

1) 2 2) 6 3) 3 4) 4

Պատասխան: 4)

Տրված պայմաններից հետևում է, որ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է: Պրոգրեսիայի տարբերությունը նշանակենք $d$-ով: $a_1 + a_2 + a_3 = 7 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 7$, $a_4 + a_5 + a_6 = 19 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 19$: Վերջին արտահայտություններն իրարից հանելով՝ ստանում ենք $9d = 12$, ուրեմն $a_4 - a_1 = 3d = 4$

5. Տրված են 1 կողմով $ABCD, EFGH$ և $GHIJ$ քառակուսիները (տես նկարը), ընդ որում $D$ և $C$ կետերը համապատասխանաբար $EH$ և $HI$ հատվածների միջնակետերն են: Գտնել $ABCIJ$ հնգանկյան մակերեսը:

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{7}{8}$ 3) 1 4) $\frac{5}{6}$

Պատասխան: 3)

Դիցուք $AB$ և $IJ$ ուղիղները հատվում են $K$ կետում: $AKJ$ եռանկյան մակերեսը $\frac{1.5\cdot 2}{2} = 1.5$ է, իսկ $CBKI$ ուղղանկյանը՝ 0.5, ուրեմն ստվերագծված պատկերի մակերեսը կլինի՝ $1.5 - 0.5 = 1$:

6. Գտնել $x-[\sqrt{x}]^2=4$ հավասարման 40-ից փոքր արմատների գումարը ($[a]$-ով նշանակում ենք $a$ թիվը չգերազանցող առավելագույն ամբողջ թիվը, օրինակ՝ $[4.5]=4$):

1) 75 2) 70 3) 41 4) 21

Պատասխան: 2)

$[\sqrt{x}]$-ը նշանակենք $k$-ով: Ուրեմն $x=k^2+4$, ընդ որում $x<(k+1)^2 \Rightarrow k^2+4<(k+1)^2 \Rightarrow k\geq 2$: Ուրեմն նշված միջակայքում հավասարմանը բավարարում են միայն հետևյալ թվերը՝ $8,13,20,29$, որոնց գումարը 70 է:

7. Գտնել ամբողջաթիվ կոորդինատներով կետերի քանակը, որոնք ընկած են $(0;0)$ կենտրոնով և 5 շառավղով շրջանագծի վրա, կամ դրա ներսում:

1) 60 2) 72 3) 81 4) 121

Պատասխան: 3)

Հեշտ է նկատել, որ $(0,0);(4,4)$ անկյունագծով քառակուսու մեջ միայն մի կետ՝ $(4,4)$-ը ընկած չէ շրջանագծի մեջ կամ դրա վրա, իսկ առաջին քառորդին պատկանող և խնդրի պայմանին բավարարող բոլոր կետերը գտնվում են այդ քառակուսու մեջ, ուրեմն առաջին քառորդում բավարարող կետերի քանակը $16-1=15$ է: Սիմմետրիկությունից ստանում ենք, որ չորս քառորդներում միասին կան 60 պայմանին բավարարող կետ: Մյուս կողմից կոորդինատական առանցքներից յուրաքանչյուրի վրա կան 11-ական բավարարող կետեր $\Rightarrow$ ընդհանուր կլինի $60+22-1=81$ բավարարող կետ (սկզբնակետը հաշվել էինք երկու անգամ):

8. $x,y,z$ ոչ զրոյական թվերը բավարարում են $x+y+z=xyz$ պայմանին: Գտնել հետևյալ արտահայտության արժեքը:

$$\frac{1+yz}{yz}+\frac{1+xz}{xz}+\frac{1+xy}{xy}$$

1) 4 2) 6 3) 8 4) 10

Պատասխան: 1)

$\frac{1+yz}{yz}+\frac{1+xz}{xz}+\frac{1+xy}{xy}=3+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=3+\frac{x+y+z}{xyz}=4$

9. Գտնել $x=|2x-|60-2x||$ հավասարման արմատների գումարը:

1) 120 2) 92 3) 60 4) 48

Պատասխան: 2)

Դեպք 1: $x=2x-|60-2x| \Rightarrow x=|60-2x|$
ա) $x=60-2x \Rightarrow x=20$,
բ) $x=2x-60 \Rightarrow x=60$
Դեպք 2: $x=|60-2x|-2x \Rightarrow 3x=|60-2x|$
ա) $3x=60-2x \Rightarrow x=12$,
բ) $3=2x-60 \Rightarrow x=-60$
Սակայն սկզբնական հավասարումից հետևում է, որ $x\geq 0$, ուրեմն հավասարման լուծումներն են՝ $12,20,60$, որոնց գումարը 92 է:

10. Տրված են $a<b<c<d$ ոչ զրոյական իրական թվեր, այնպիսին, որ $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<\frac{1}{d}<\frac{1}{c}$: Հետևյալ արտահայտություններից, ո՞ր մեկը կլինի միշտ դրական տրված պայմանների դեպքում:

1) $-a-2b-4c+3d$ 2) $2a-b+3c+2d$ 3) $-2a-3b-c+2d$ 4) $-a+3b+4c+5d$

Պատասխան: 3)

$m<n$ պայմանի առկայության դեպքում $\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$ պայմանը համարժեք է $n$ և $m$ թվերի միևնույն նշանն ունենալուն, ուրեմն $a, b$ թվերը բացասական են, իսկ $c, d$ թվերը՝ դրական:
Ուստի $-2a-3b-c+2d>2d-c>d-c>0$:

11. Գտնել փոքրագույն բնական թիվը, որն ունի ճիշտ 28 հատ բաժանարար:

1) 1728 2) 1920 3) 8192 4) այլ պատասխան

Պատասխան: 4)

Դիտարկենք $2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^1=960$ թիվը: Բաժանարարների քանակի բանաձևից՝ այն ունի $(6+1)(1+1)(1+1)=28$ բաժանարար և փոքր է բոլոր նշված թվերից, ուստի ճիշտ է 4-րդ տարբերակը:

12. Գտնել բոլոր $n$ բնական թվերի գումարը, որոնց համար $\frac{n^2+20n+51}{n^2+4n+3}$-ը բնական թիվ է:

1) 26 2) 28 3) 30 4) 32

Պատասխան: 1)

$$\frac{n^2+20n+51}{n^2+4n+3}=\frac{(n+3)(n+17)}{(n+1)(n+3)}=\frac{n+17}{n+1}=1+\frac{16}{n+1}$$

Ուրեմն հնարավոր են հետևյալ դեպքերը.
$n+1=2 \Rightarrow n=1$
$n+1=4 \Rightarrow n=3$
$n+1=8 \Rightarrow n=7$
$n+1=16 \Rightarrow n=15$
Հետևաբար լուծումների գումարը կլինի 26:

13. Գտնել այն բոլոր $(m, n)$ բնական թվերի թվազույգերի քանակը, որոնց համար:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{5}$$

1) 2 2) 3 3) 4 4) 6

Պատասխան: 2)

Խնդրի պայմանից հետևում է, որ $5(m+n)=mn$: Ենթադրենք $m \geq n$:
Ուրեմն $5m<5(m+n) \leq 10m$, որտեղից հետևում է, որ $6 \leq n \leq 10$: Ստուգելով ստացված 5 դեպքերը ստանում ենք, որ խնդրին բավարարում են միայն $(6,30)$ և $(10,10)$ թվազույգերը, սակայն թվազույգերը կարգավորված են, հետևաբար $(30,6)$ վերջին բավարարող թվազույգն է, իսկ լուծումների ընդհանուր քանակը 3 է:

14. Քանի ձևով կարելի է ընտրել $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ բազմության ենթաբազմություն այնպես, որ այդ ենթաբազմության ոչ մի երկու տարրի գումար հավասար չլինի 11-ի:

1) 286 2) 252 3) 243 4) 372

Պատասխան: 3)

Դիտարկենք հետևյալ զույգերը. $(1,10),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)$:
Խնդրի պայմանը համարժեք է այնպիսի ենթաբազմություն կառուցելուն, որը չի պարունակում նշված զույգերից ոչ մեկը: Ուրեմն ամեն զույգի համար ունենք 3 ընտրության հնարավորություն՝
ա) ենթաբազմության մեջ ներառում ենք զույգի միայն առաջին անդամը,
բ) ենթաբազմության մեջ ներառում ենք զույգի միայն երկրորդ անդամը,
գ) ենթաբազմության մեջ տրված զույգի ոչ մի անդամ չենք ներառում:
Քանի որ ընդհանուր կա 5 զույգ, ապա կունենանք $3^5=243$ իրարից տարբեր ենթաբազմություն կառուցելու եղանակ:

15. $3\times 3$ աղյուսակի բոլոր վանդակները ներկված են չորս գույներից մեկով այնպես, որ կամայական $2\times 2$ քառակուսի պարունակում է բոլոր չորս գույները: Գտնել այդպիսի ներկումների քանակը:

1) 48 2) 60 3) 72 4) 96

Պատասխան: 3)

Դիցուք ձախ վերին $2\times 2$ քառակուսու վանդակները ներկված են $a,b,c,d$ գույներով (ինչպես ցույց է տրված նկարներում): Ուրեմն կա մնացած վանդակները լրացնելու 3 տարբեր եղանակ.

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| c | d | a |
| a | b | c |

| | | |
|---|---|---|
| a | b | a |
| c | d | c |
| a | b | a |

| | | |
|---|---|---|
| a | b | a |
| c | d | c |
| b | a | b |

$a,b,c,d$ գույները կարելի է ընտրել $4!=24$ ձևով, ուրեմն ընդհանուր ներկումների քանակը կլինի $24\cdot 3=72$:

16. Գտնել $(a,b,c,d,e)$ կարգավորված ամբողջ թվերի հնգյակների քանակը, որոնց համար ճիշտ է $abcde+15=0$ առնչությունը

Պատասխան: 400

$abcde=-15$ հետևաբար հինգ ամբողջ թվերի մեջ պետք է բաշխել մեկական 3 և 5 արտադրիչ, ինչպես նաև կենտ քանակությամբ $-1$-եր: Ուրեմն ընդհանուր կարգավորված հնգյակների քանակը կլինի՝ $5\cdot 5\cdot (C_5^1+C_5^3+C_5^5)=400$:

17. Բնական թիվը կանվանենք համարյա պոլինդրոմ, եթե հնարավոր է այդ թվի ձախ մասից ավելացնել ոչ զրոյական թվանշան, այնպիսին, որ ստացված թիվը դառնա պոլինդրոմ (թիվը կանվանենք պոլինդրոմ եթե թվանշանների հաջորդականությունը աջից ձախ և ձախից աջ նույն են: Օրինակ 12321 թիվը պոլինդրոմ է, բայց 123432 թիվը պոլինդրոմ չէ): Ըստ սահմանման 2024 թիվը համարյա պոլինդրոմ է, որովհետև այդ թվի ձախ մասից ավելացնելով 4 թվանշանը կստացվի 42024, որը պոլինդրոմ է: Գտնել վեցանիշ համարյա պոլինդրոմ թվերի քանակը, որոնք բաժանավում են 9-ի վրա:

Պատասխան: 900

Դիտարկենք $abcdef$ վեցանիշ թիվը: Այն կլինի համարյա պոլինդրոմ, եթե $a=e$, $b=d$ և $f>0$ (չենք կարող ձախից կցագրել 0): Վերջին պայմանը հաշվի առնելով՝ $a,b,c$ թվանշանները կամայական ձևով ընտրելուց հետո կգտնվի $f$-ի միակ հնարավոր արժեք, որի դեպքում թիվը կբաժանվի 9-ի: Ուրեմն խնդրի պայմաններին բավարարող վեցանիշ թվերի քանակը հավասար է եռանիշ թվերի քանակին ՝ 900:

18. Տրված է 20 կողմի երկարությամբ $ABCD$ քառակուսին: $P$-ն և $Q$-ն համապատասխանաբար $BC$ և $CD$ հատվածների միջնակետերն են, իսկ $PD$ և $AQ$ հատվածները հատվում են $K$ կետում: Գտնել $ABPK$ քառանկյան մակերեսը:

Պատասխան: 220

$AKD$ և $DKQ$ եռանկյունների մակերեսները նշանակենք համապատասխանաբար $S_1$ և $S_2$, իսկ $ABPK$ և $KPCQ$ քառանկյուններինը՝ $S_3$ և $S_4$: Սիմմետրիկությունից $S_1 + S_2 = S_2 + S_4 \Rightarrow S_1 = S_4$: Մյուս կողմից, $AKD$ և $DKQ$ եռանկյունները նման են՝ նմանության 2 գործակցով, հետևաբար $S_1 = 4S_2$:
$S_1 + S_2 = 5S_2 = 100 \Rightarrow S_2 = 20$: Ուրեմն $S_3 = 400 - S_1 - S_2 - S_4 = 400 - 4S_2 - S_2 - 4S_2 = 400 - 9S_2 = 220$:

19. $n$ բնական թվի համար համապատասխանաբար $S(n)$-ով և $P(n)$-ով նշանակենք $n$ թվի բաժանարարների գումարն ու պարզ արտադրիչների քանակը (օրինակ՝ $P(45) = 2$, քանի որ 45-ի պարզ բաժանարարներն են 3-ն ու 5-ը և $S(45) = 78$, քանի որ 45-ի բաժանարարներն են՝ $1, 3, 5, 9, 15, 45$, որոնց գումարը 78 է): Գտնել $P(n)$-ի նվազագույն արժեքը եթե հայտնի է, որ $S(n) > 4n$:

Պատասխան: 4

Նախ ցույց տանք, որ նշված պայմանների դեպքում $P(n) \geq 4$: Ենթադրենք հակառակը. գոյություն ունի այնպիսի $n$ բնական թիվ, որը բավարարում է խնդրի պայմաններին, սակայն $P(n) \leq 3$: Դիցուք $n = p_1^a \cdot p_2^b \cdot p_3^c$ ($a, b, c$ թվերից որոշները կարող են լինել 0):

$$4 < \frac{S(n)}{n} = \frac{\frac{p_1^{a+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{b+1}-1}{p_2-1} \cdot \frac{p_3^{c+1}-1}{p_3-1}}{p_1^a \cdot p_2^b \cdot p_3^c} < \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \frac{p_3}{p_3-1} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} < 4$$

Եկանք հակասության, հետևաբար նշված պայմանների դեպքում $P(n) \geq 4$: Սակայն հեշտ է համոզվել, որ $n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ դեպքում $S(n) > 4n$, ուրեմն խնդրի պատասխանը հենց 4 է:

20. Գտնել մեծագույն $n$ բնական թիվը, որի համար գոյություն ունի ուռուցիկ $n$-անկյուն բազմանկյուն, որի անկյունները զույգ առ զույգ իրարից տարբեր բնական թվեր են՝ արտահայտված աստիճաններով:

Պատասխան: 26

Ցանկացած ուռուցիկ բազմանկյան արտաքին անկյունների գումարը 360 է, իսկ ներքին անկյունների զույգ առ զույգ տարբեր լինելուց հետևում է արտաքին անկյունների զույգ առ զույգ տարբեր լինելը, որտեղից էլ ստանում ենք $\frac{n(n+1)}{2} \leq 360$ գնահատականը: Այստեղից հետևում է, որ $n \leq 26$: Բազմանկյան արտաքին անկյունները վերցնելով $1, 2, ..., 25, 35$՝ կստանանք ուռուցիկ 26-անկյուն, որը բավարարում է նշված պայմաններին, ուստի $n$-ի հնարավոր մեծագույն արժեքը 26 է: