

Լուծումներ
10-րդ դասարան

Խնդիր 1: Պարասխան: 89:

Լուծում: Նախ բերենք 89-ի համար բավարարող օրինակ: Դիտարկենք հետևյալ հաջորդականությունը.

$$89, 1, 88, 2, 87, 3, \dots, 43, 46, 44, 45,$$

որը ֆորմալ կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ. $a_{2i-1} = 90-i$; $a_{2i} = i$: Նկատենք, որ հաջորդականության ցանկացած երկու հաջորդական անդամների գումարը 89 կամ 90 է: Ցանկացած a թվի համար $a(90-a) \leq 45^2$, $a(89-a) \leq 44.5^2 < 45^2$ և $45^2 = 2025 < 2026$, հետևաբար նշված հաջորդականությունը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Այժմ ցույց փանք, որ $n = 90$ -ի համար չկա բավարարող օրինակ (նկատենք, որ դրանից կհետևի նաև $n > 90$ դեպքի անհնարությունը): Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի խնդրի պայմանին բավարարող $a_1, a_2, \dots, a_{90}$ հաջորդականություն: Տրված թվերը փրոհենք գույգերի՝

$$a_1, a_2$$

$$a_3, a_4$$

$$\vdots$$

$$a_{89}, a_{90}$$

Նկատենք, որ նշված գույգերից առնվազն մեկում երկու թիվն էլ պետք է լինեն մեծ 44-ից, այլապես կունենանք կրկնություն: Այդ գույգը նշանակենք a_i, a_{i+1} : Նկատենք, որ $a_i \cdot a_{i+1} \geq 45 \cdot 46 > 2026$, ինչը հակասում է խնդրի պայմաններին, ուրեմն $n = 90$ -ի համար գոյություն չունի բավարարող օրինակ:

Խնդիր 2: Պարասխան: $p = 17$, $q = 3$:

Լուծում: Նախ ցույց փանք, որ n -ը կենք է: Ենթադրենք, որ n -ը գույգ է՝ $n = 2k$: Ապա

$$q^2 + 8 = p^n = (p^k)^2 \Rightarrow q^2 + 8 \geq (q+1)^2 \Rightarrow q \leq 3,$$

սակայն նկատենք, որ $q = 2$ դեպքը լուծման չի բերում, իսկ $q = 3$ դեպքում ունենում ենք $n = 1$, $p = 17$: Ուրեմն n -ը պետք է իրոք լինի կենք:

Քանի որ արդեն դիտարկել ենք $q = 3$ դեպքը, կարող ենք համարել, որ $q \neq 3$, ուրեմն q -ն չի բաժանվի 3-ի, որպեսզի ստանանք ենք, որ $q^2 + 8 \equiv 1 + 8 \equiv 0 \pmod{3}$, հետևաբար $p = 3$:

Նկատենք, որ քանի որ n -ը կենք է, կունենանք, որ $3^n \equiv 3 \pmod{4}$, սակայն $q^2 + 8 \equiv q^2 \equiv 0 \pmod{4}$, ուրեմն այս դեպքում լուծումներ չկան, հետևաբար միակ լուծումը կլինի $q = 3$, $p = 17$:

Խնդիր 3:

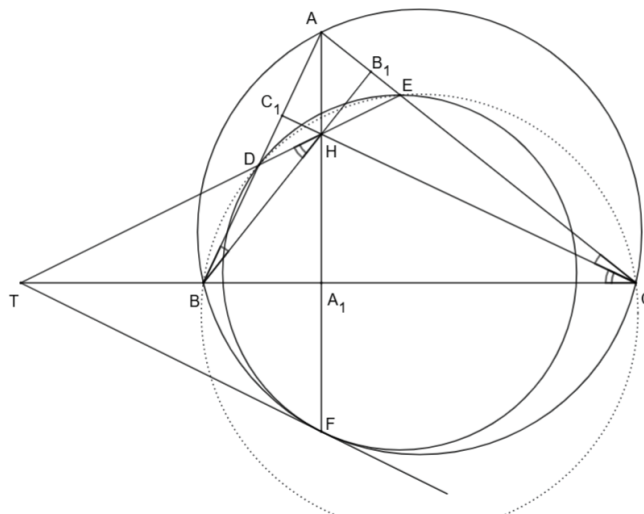
Լուծում: Դիցուք AA_1, BB_1, CC_1 հարվածները ABC եռանկյան բարձրություններն են: BC_1B_1C քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, հետևաբար $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$: Մյուս կողմից, շոշափողի պայմանից ունենք, որ $\angle C_1CB = \angle DHB$, ուրեմն

$$\angle ADE = \angle ABB_1 + \angle DHB = \angle ACC_1 + \angle HCB = \angle ACB,$$

հետևաբար B, D, E, C կետերը գտնվում են միևնույն շրջանագծի վրա: Դիցուք DE և BC ուղիղները հարվում են T կետում: $BDEC$ քառանկյան արտագծելիությունից ունենք, որ $TD \cdot TE = TB \cdot TC$: Մյուս կողմից, TH -ը շոշափում է BHC -ի ակրագծած շրջանագիծը, ուստի $TH^2 = TB \cdot TC = TD \cdot TE$:

$\angle B_1BC = \angle FAC = \angle FBC$ և $BC \perp HF$, հետևաբար BC ուղիղը հանդիսանում է HF հարվածի միջնորդահայացը, մասնավորապես $TH = TF$: Ուրեմն՝

$$TF^2 = TH^2 = TB \cdot TC = TD \cdot TE,$$



հետևաբար TF ուղիղը շոշափում է $\triangle ABC$ և $\triangle DEF$ եռանկյունների արտագծած շրջանագծերը, հետևաբար դրանք միմյանց շոշափում են:

Խնդիր 4: Պարասխան: Այո

Լուծում: Յույց փանք, որ կամայական n բնական թվի և կամայական 3×3 սկզբնական աղյուսակի դեպքում էլ Արմանը կարող է հասնել իր ուզածին: Ենթադրենք հակառակը, ուրեմն կա որևէ n բնական թիվ և որևէ 3×3 սկզբնական աղյուսակ, որի դեպքում Արմանը չի կարողանա բոլոր մնացորդները «հավասարեցնել»: Վերցնենք այդ աղյուսակը և նրա կենտրոնական և անկյունային (4 անկյուններում գտնվող վանդակները) վանդակներով այնքան քայլ անենք, մինչև դրանցից յուրաքանչյուրում հայտնվի n -ի վրա բաժանվող թիվ:

Նկատենք, որ կարմիրով ներկված վանդակներով մեկական քայլ անելու արդյունքում կապույտ վանդակի թիվը կմեծանա 2-ով, իսկ մյուս բոլոր վանդակներինը՝ 1-ով, հետևաբար նմանափայ երեք քայլերը կրկնելով, կարող ենք հասնել այնպիսի աղյուսակի, որում կենտրոնական, անկյունային ինչպես նաև կապույտ վանդակում գրված կլինեն n -ի վրա բաժանելիս միևնույն մնացորդը տվող թվեր: Միմյուսից հեռու կարող ենք նույնն անել մնացած 3 վանդակների հետ:

Օրինակ: Դիցուք $n = 5$, և տրված է հետևյալ աղյուսակը.

2	6	6
10	1	4
3	2	7

Մինչ այս նկարագրված փուլերով կարողանում ենք բոլոր վանդակներում սպանալ 5-ի վրա բաժանելիս 4 մնացորդ չվող թվեր (ամեն հաջորդ աղյուսակ սպացվում է նախորդից՝ նախորդում ներկված վանդակներով մի կամ մի քանի քայլ անելու արդյունքում):

2	6	6
10	1	4
3	2	7

5	17	10
19	5	15
5	11	10

6	17	11
21	6	16
6	12	11

10	25	15
25	10	20
10	16	15

14	29	19
29	14	24
14	24	19