

Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի դպրոցական փուլ 2025-2026 ուսարարի
10-րդ դասարան
Տևողությունը – 2 ժամ 30 րոպե

1. Պարկի մեջ կա 10 հար կապույտ, 15 հար կարմիր և 18 հար կանաչ գնդակ: Նվազագույնը քանի՞ գնդակ պետք է Արմենն առանց նայելու հանի պարկից, որ վստահ լինի, որ հանել է առնվազն 3 հար կապույտ, 2 հար կարմիր և 5 հար կանաչ գնդակ:

- 1) 30 2) 35 3) 36 4) Այլ պատասխան

Պատասխան: 3) 36

Լուծում: Նկատենք, որ առնվազն 3 կապույտ գնդակ ապահովելու համար անհրաժեշտ է պարկից հանել $3 + 15 + 18 = 36$ գնդակ: Նույն ձևով, 2 կարմիր գնդակ ապահովելու համար հարկավոր է հանել $10 + 2 + 18 = 30$, իսկ 5 կանաչի համար՝ $10 + 15 + 5 = 30$ գնդակ: Ուրեմն բոլոր երեք պայմաններն ապահովելու համար անհրաժեշտ է հանել $\max(36, 30, 30) = 36$ գնդակ:

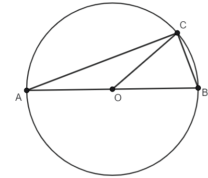
2. Դիցուք n -ը փոքրագույն բնական բաղադրյալ թիվն է, որը չունի 10-ից փոքր պարզ բաժանարար: Տեսնելով պնդումներից ո՞րն է ճիշդ:

- 1) $100 < n \leq 110$ 2) $110 < n \leq 120$ 3) $120 < n \leq 130$ 4) $130 < n \leq 140$

Պատասխան: 3) $120 < n \leq 130$

Լուծում: Նկատենք, որ n -ը պետք է ունենա առնվազն երկու պարզ բաժանարար, որոնցից յուրաքանչյուրը պետք է լինի առնվազն 11, ուրեմն $n \geq 121$: Մյուս կողմից, հենց $n = 121$ օրինակը բավարարում է խնդրի պայմաններին, ուստի փոքրագույն բավարարող n բնական թվի համար ճիշտ է $120 < n \leq 130$ պայմանը:

3. Տրված է O կենտրոնով և AB տրամագծով շրջանագիծ (տես նկարը): C կետն այդ շրջանագծի վրա ընկած է այնպես, որ $\angle ACO = 20^\circ$: Գտնել $\angle ABC$ անկյունը:



- 1) 40 2) 60 3) 70 4) 80

Պատասխան: 3) 70°

Լուծում: O կետը հավասարահեռ է A և C կետերից, հետևաբար ACO եռանկյունը հավասարասրուն է, ուստի՝ $\angle CAB = \angle ACO = 20^\circ$: Մյուս կողմից, ունենք, որ $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$, ուրեմն $\angle ABC = 70^\circ$:

4. Մանեն միավոր խորանարդներից կառուցում է մեծ խորանարդ և այն ամբողջությամբ ներկում: Ինչի՞ կարող է հավասար լինել ներկված և չներկված միավոր խորանարդների քանակների հարաբերությունը (ներկված ենք անվանում այն միավոր խորանարդները, որոնց առնվազն մեկ նիստը ներկված է):

- 1) $\frac{152}{64}$ 2) $\frac{61}{64}$ 3) $\frac{216}{296}$ 4) $\frac{27}{37}$

Պատասխան: 1) $\frac{152}{64}$, 2) $\frac{61}{64}$

Լուծում: Դիցուք Մանեն կառուցել էր n կողմով խորանարդ, այսինքն օգտագործել էր n^3 հար միավոր խորանարդ: Նկատենք, որ այդ միավոր խորանարդներից ճիշտ $(n-2)^3$ -ը չեն լինի ներկված, հետևաբար պահանջվող հարաբերությունը կունենա $\frac{n^3 - (n-2)^3}{(n-2)^3}$ տեսքը: Նկատենք, որ նշված փոքրերակներից միայն առաջին երկուսն են բավարարում այս տեսքին, համապատասխանաբար $n = 6$ և $n = 10$ դեպքերում:

5. Գտնել փոքրագույն բնական n թիվը, որի համար $2x + \frac{4}{x^2} = n$ հավասարումն ունի դրական լուծում:

- 1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

Պատասխան: 2) 5

Լուծում: Նկատենք, որ $n = 5$ -ի համար հավասարումն ունի դրական լուծում $x = 2$: Մյուս կողմից ունենք

$$2x + \frac{4}{x^2} = x + x + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{4} > 4,$$

որտեղ անհավասարումը ստացվում է Կոշու անհավասարման կիրառումով: Ուրեմն $n \leq 4$ բնական թվերի համար հավասարումը չի կարող ունենալ դրական լուծում, հետևաբար 5-ի փոքրագույն բավարարող բնական թիվն է:

6. Գտնել նվազագույն n բնական թիվը, որի համար $\frac{n-13}{5n+6}$ -ը դրական կրճաբաժանի կոտորակ է:

- 1) 45 2) 58 3) 84 4) Այլ պատասխան

Պատասխան: 3) 84

Լուծում: Նկատենք, որ

$$(n - 13, 5n + 6) = (n - 13, 5n + 6 - 5(n - 13)) = (n - 13, 71) \neq 1 :$$

Մյուս կողմից, 71-ը պարզ թիվ է, հետևաբար, որպեսզի խնդրի պայմանը կարարվի, հարկավոր է, որ $n - 13$ -ը բաժանվի 71-ի վրա, ուստի խնդրի պայմաններին բավարարող նվազագույն բնական թիվը $71 + 13 = 84$ -ն է:

7. Գրաբախարակին հերթով գրում են 1-ից 999 բոլոր թվերը՝ արդյունքում ստանալով 1234567891011...998999 թիվը: Գտնել ստացված թվի ձախից 2025-րդ թվանշանը:

- 1) 1 2) 2 3) 7 4) Այլ պատասխան

Պատասխան: 1) 1

Լուծում: Գտնենք, թե 1, 2, ..., 999 թվերից որի մեջ է ընկած ձախից 2025-րդ թվանշանը: Բոլոր միանիշ և երկնիշ թվերը գրելու համար պահանջվում է $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ թվանշան, հետևաբար եռանիշների մնացած $2025 - 189 = 1836$ թվանշաններն օգտագործվել են եռանիշ թվերի գրառման համար: $1836 = 3 \cdot 612$, ուրեմն մեզ պետք է գտնել 612-րդ եռանիշ թվի՝ $99 + 612 = 711$ -ի ձախից երրորդ թվանշանը, որը 1-ն է:

8. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր 3×3 տախտակի վրա դնել մեկական սև և սպիտակ շախմատի ձիերի այնպես, որ դրանք միմյանց չհարվածեն:

- 1) 16 2) 40 3) 56 4) 64

Պատասխան: 3) 56

Լուծում: Դիտարկենք երկու դեպք.

Դեպք 1: Ձիերից որևէ մեկը գտնվում է կենտրոնական վանդակում:

Այս դեպքում երկրորդ ձին կարող ենք տեղադրել մնացած 8 վանդակներից յուրաքանչյուրում, ուրեմն այս դեպքում կա $2 \cdot 8 = 16$ տարբերակ:

Դեպք 2: Ձիերից ոչ մեկը չի գտնվում կենտրոնական վանդակում:

Այս դեպքում կարող ենք 8 տարբերակով տեղադրել սպիտակ ձին: Այդ 8 դեպքերից յուրաքանչյուրում սպիտակ ձին հարվածի տակ կպահի 2 վանդակ, հետևաբար՝ սև ձին տեղադրելու համար կմնա 5 հասանելի ոչ կենտրոնական վանդակ, ուրեմն այս դեպքում կա $8 \cdot 5 = 40$ տարբերակ:

Ընդհանուր կոնենանք $16 + 40 = 56$ բավարարող տարբերակ:

9. Գտնել այն բոլոր պարզ թվերից բաղկացած (p, q, r) կարգավորված եռյակների քանակը (թվերը կարող են նաև նույնը լինել), որոնց համար $p^2 + pq + q^2 = r^2 + 15$:

- 1) 1 2) 2 3) 4 4) Այլ պատասխան

Պատասխան: 2) 2

Լուծում: Պարզ է, որ p, q թվերից առնվազն մեկը պետք է մեծ լինի 2-ից, քանի որ հակառակ դեպքում $p^2 + pq + q^2 = 12 < 15 < 15 + r^2$: Նկատենք, որ այսպեղից հետևում է, որ ձախ մասի արտահայտության մեջ կամ բոլոր երեք գումարելիներն էլ կենտ են, կամ գումարելիներից ճիշտ մեկն է կենտ, ուստի ձախ մասում միշտ գումարը կլինի կենտ: Այսպեղից հետևում է, որ r -ը պետք է լինի գույգ, քանի որ հակառակ դեպքում աջ մասում կունենանք գույգ թիվ: Միակ գույգ պարզ թիվը 2-ն է, հետևաբար $r = 2$, ուրեմն $p^2 + pq + q^2 = 19$: Նեշտ է նկատել, որ $p, q < 5$, որպեղից էլ ստանում ենք վերջավոր դեպքեր, որոնցից միայն երկուսն են բավարարում՝ $p = 2, q = 3, r = 2$ և $p = 3, q = 2, r = 2$:

10. $a_1, a_2, a_3, \dots$ բնական թվերից կազմված աճող հաջորդականության համար հայտնի է, որ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ կամայական n բնական թվի համար: Նայքին է նաև, որ $a_7 = 120$: Գտնել a_8 -ի արժեքը:

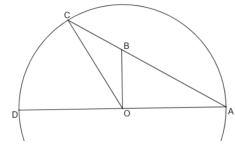
- 1) 168 2) 178 3) 194 4) 210

Պատասխան: 3) 194

Լուծում: Խնդրում տրված պայմանը մի քանի անգամ կիրառելով կստանանք, որ $a_7 = 5a_1 + 8a_2$, $a_8 = 8a_1 + 13a_2$: Ուրեմն $5a_1 + 8a_2 = 120$, որպեղից էլ հետևում է, որ a_1 -ը բաժանվում է 8-ի քանի որ մյուս երկու անդամն են բաժանվում: Մյուս կողմից, $a_1 < a_2 \Rightarrow 120 = 5a_1 + 8a_2 > 5a_1 + 5a_2 > 10a_2$, ուստի $a_1 < 12$: Ուրեմն կա միայն մի տարբերակ՝ $a_1 = 8$, հետևաբար $a_2 = 10$, որպեղից էլ ստանում

ենք $a_8 = 8a_1 + 13a_2 = 8 \cdot 8 + 13 \cdot 10 = 194$:

11. Նկարում ցուցված է O կենտրոնով շրջանագիծը, որում ցուցված է AD տրամագիծը: C կետը ընկած է շրջանագծի վրա այնպես, որ $\angle COD = 60^\circ$, իսկ B կետը՝ AC հարվածի վրա այնպես, որ $\angle OBA = 60^\circ$: Նայանի է, որ $OB = 5$: Գտնել BC հարվածի երկարությունը:



- 1) 3 2) $3\sqrt{3}$ 3) $3 + \sqrt{3}$ 4) 5

Պատասխան: 4) 5

Լուծում: OCA եռանկյան հավասարասրունությունից՝ $\angle OCA = \angle OAC = \frac{1}{2}\angle COD = 30^\circ$: Մյուս կողմից, $\angle COB = \angle OBA - \angle BCO = 30^\circ = \angle BCO$, հետևաբար BCO եռանկյունը հավասարասրուն է, ուստի $BC = OB = 5$:

12. Գտնել (m, n) երկնիշ թվերից կազմված կարգավորված զույգերի քանակը, որոնց համար $m + n = [m, n] - (m, n)$ ((m, n) -ով և $[m, n]$ -ով նշանակում ենք m -ի և n -ի համապարասխանաբար ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ու ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը):

- 1) 0 2) 12 3) 30 4) 58

Պատասխան: 4) 58

Լուծում: Դիցուք $n = (m, n) \cdot n_0$, $m = (m, n) \cdot m_0$: Ուրեմն n_0 և m_0 թվերը փոխադարձաբար պարզ են, հետևաբար $[m, n] = (m, n) \cdot m_0 n_0$: Խնդրում ցուցված արտահայտությունը (m, n) -ով կրճատելով՝ ստանում ենք $m_0 + n_0 = m_0 n_0 - 1 \Rightarrow n_0 = \frac{m_0 + 1}{m_0 - 1}$: Ուրեմն $m_0 + 1$ -ը բաժանվում է $m_0 - 1$ -ի, որը հնարավոր է միայն երկու դեպքում՝ $m_0 = 2$ կամ $m_0 = 3$: Առաջին դեպքում ստանում ենք, որ $n_0 = 3$, իսկ երկրորդում $n_0 = 2$, այսինքն պետք է փնտրենք $2l, 3l$ տեսքի երկնիշ թվերից կազմված թվազույգերի քանակը: Նեշտ է նկատել, որ $5 \leq l \leq 33$, ուրեմն կա այդպիսի 29 թվազույգ, մյուս կողմից նկատենք, որ յուրաքանչյուր l թիվ ծնում է երկու լուծում՝ $n = 2l, m = 3l$ և $n = 3l, m = 2l$, ուրեմն կա ընդհանուր 58 բավարարող թվազույգեր:

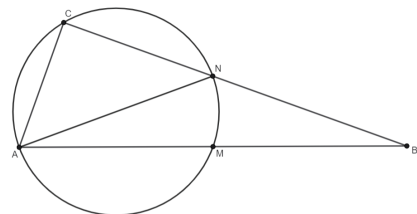
13. Դիցուք a, b, c, d թվերը $3x^4 - 6x^2 + 2 = 0$ հավասարման լուծումներն են: Գտնել $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ արտահայտության արժեքը:

- 1) 3 2) $3\sqrt{2}$ 3) 6 4) Այլ պատասխան

Պատասխան: 4) Այլ պատասխան

Լուծում: Նկատենք, որ եթե x_0 թիվը ցուցված հավասարման լուծում է, ապա $-x_0$ -ն նույնպես լուծում է, ուրեմն a, b, c, d թվերը ներկայացնում են հակադիր թվերից բաղկացած երկու զույգ: Նախադիր թվերի խորանարդների գումարը 0 է, հետևաբար $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$:

14. Տրված է C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, որում $\angle ABC = 18^\circ$: Դիցուք M -ը AB ներքնաձիգի միջնակետն է, իսկ N -ը՝ CAM եռանկյան արտագծած շրջանագծի և BC կողմի երկրորդ հարման կետը: Գտնել $\angle CAN$ անկյունը:

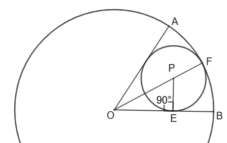


- 1) 36 2) 48 3) 54 4) 60

Պատասխան: 3) 54

Լուծում: Նկատենք, որ $\angle ACB + \angle AMN = 180^\circ \Rightarrow \angle AMN = 90^\circ$, հետևաբար N կետը գտնվում է AB հարվածի միջնուղղահայացի վրա, ուրեմն ANB եռանկյունը հավասարասրուն է, որտեղից էլ ստանում ենք $\angle ANC = \angle NAC + \angle NCA = 2\angle NCA = 36^\circ$, ուրեմն $\angle CAN = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$

15. A և B կետերը գտնվում են O կենտրոնով և 6 շառավղով շրջանագծի վրա, ընդ որում $\angle AOB = 60^\circ$: Գտնել այն շրջանագծի տրամագիծը, որը ներքնապես շոշափում է ցուցված շրջանագծին, ինչպես նաև AO և BO հարվածները:



Պատասխան: 4) 4

Լուծում: Դիցուք P -ն երկրորդ շրջանագծի կենտրոնն է, E -ն՝ շրջանագծի և OB հապվածի շոշափման կետն, իսկ F -ը՝ շրջանագծերի շոշափման կետը: Շրջանագծերի շոշափման պայմանից ստանում ենք $OP = 6 - r$, որպեսզի r -ը փոքր շրջանագծի շառավիղն է: Նկատենք, որ OPE եռանկյունը $\angle POE = 30^\circ$ անկյունով ուղղանկյուն եռանկյուն է, հետևաբար $OP = 2PE = 2r$, որպեսզից ստանում ենք $2r = 4$, ուրեմն փրամագիծը կլինի հենց 4:

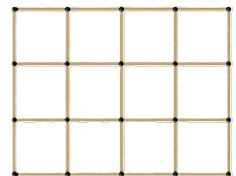
- 1) 2 2) $2\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt{3}$ 4) 4

16. Գտնել այն քառանիշ թվերի քանակը, որոնց գրության մեջ մասնակցում է առավելագույնը 2 իրարից փարբեր թվանշան (օրինակ՝ 1411):

Պատասխան: 576

Լուծում: Պարզ է, որ կա 9 քառանիշ թիվը, որոնց կազմության մեջ մասնակցում է միայն մեկ թվանշան: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ կազմության մեջ մասնակցում է ճիշտ երկու թվանշան: 9 ձևով ընտրենք հազարավորի թվանշանը: Եվս 9 ձևով ընտրենք մյուս կիրառվող թվանշանը (պետք է առաջինից փարբեր լինի): Ամեն այսպիսի գույգի համար կա 7 փարբերակ՝ $abbb, abba, abab, aabb, abaa, aaba, aaab$, ուրեմն ընդհանուր այս դեպքում կլինի $9 \cdot 9 \cdot 7 = 567$ փարբերակ, ուրեմն ընդհանուր ունենք 576 պայմաններին բավարարող քառանիշ թիվ:

17. Ինչպես պարկերված է նկարում, 3×4 աղյուսակ կառուցելու համար անհրաժեշտ է 31 հապ լուցկի: Տիգրանը հերթով կառուցում է բոլոր այն աղյուսակները, որոնց կառուցելու համար պետք է ճիշտ 262 հապ լուցկի և որոնց բարձրությունը փոքր է լայնությունից: Գտնել բոլոր այդ աղյուսակների մակերեսների գումարը (լուցկու երկարությունը համարել 1):



Պատասխան: 541

Լուծում: Նկատենք, որ $a \times b$ աղյուսակը կառուցելու համար հարկավոր է $(a+1)b + a(b+1) = 2ab + a + b$ լուցկի: Դիցուք $2ab + a + b = 262$, ապա $4ab + 2a + 2b + 1 = 525$, ուրեմն $(2a+1)(2b+1) = 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$: Ուրեմն առաջանում են հետևյալ դեպքերը.

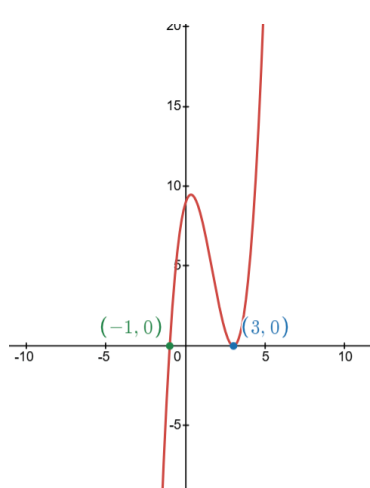
- $2a+1 = 3, 2b+1 = 175$;
- $2a+1 = 5, 2b+1 = 105$;
- $2a+1 = 7, 2b+1 = 75$;
- $2a+1 = 15, 2b+1 = 35$;
- $2a+1 = 21, 2b+1 = 25$:

Բոլոր դեպքերի համար հաշվելով $a \cdot b$ արտադրյալները և գումարելով՝ ստանում ենք վերջնական պատասխանը՝ 541:

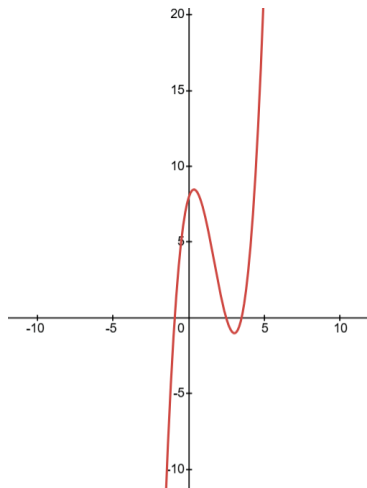
18. Գտնել այն մեծագույն c բնական թիվը, որի համար $x^3 - 5x^2 + 3x + c = 0$ հավասարումն ունի 3 գույգ առ գույգ իրարից փարբեր իրական արմար:

Պատասխան: 8

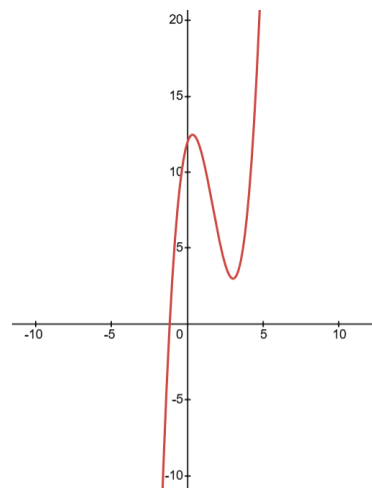
Լուծում: Գտնենք թե c -ի որ արժեքի դեպքում է նշված հավասարումն ունենում միայն երկու իրարից փարբեր արմարներ, այսինքն $x^3 - 5x^2 + 3x + c = (x-a)(x-b)^2$: Բացելով փակագծերը՝ ստանում ենք $x^3 - 5x^2 + 3x + c = x^3 - (2b+a)x^2 + (b^2+2ab)x - ab^2$, որպեսզից կունենանք $a = -1, b = 3$: Ուրեմն այս դեպքում $c = 9$: Նկատենք, որ $c > 9$ դեպքում հավասարումը կունենա միայն մեկ իրական, իսկ $c = 8$ -ի դեպքում՝ 3, ընդ որում գույգ առ գույգ իրարից փարբեր լուծումներ (հիմնավորումը գրաֆիկային եղանակով):



(a) $c = 9$



(b) $c = 8$



(c) $c > 9$

19. Գտնել այն մեծագույն բնական զույգ թիվը, որն անհնար է ներկայացնել երկու բաղադրյալ կենսական թվերի գումարի տեսքով:

Պատասխան: 38

Լուծում: Նշել է ստուգել, որ 38-ն անհնար է ներկայացնել երկու կենսական բաղադրյալ կենսական թվերի գումարի տեսքով: Ենթադրենք, որ գոյություն ունի ավելի մեծ $n > 38$ զույգ թիվը, որը նույնպես չենք կարող ներկայացնել կենսական բաղադրյալ թվերի գումարի տեսքով: Դիտարկենք $n = 9 + (n - 9)$, $n = 25 + (n - 25)$ և $n = 35 + (n - 35)$ ներկայացումները: Երեկում էլ առաջին գումարելին բաղադրյալ է, ուստի բոլոր երեքում երկրորդ բաղադրիչը պետք է լինի պարզ: Սակայն հեշտ է նկատել, որ $n - 9, n - 25, n - 35$ թվերից որևէ մեկը պետք է բաժանվի 3-ի, և բոլոր այդ թվերը մեծ են 3-ից ($n > 38$ ենթադրությունից), ուրեմն այս երեք թվերի մեջ կա բաղադրյալ թիվ, ինչը բերում է հակասության:

20. Անին մրապահում է որևէ 5 բնական թիվ (թվերը կարող են կրկնվել), ապա այդ 5 թվերից կազմված յուրաքանչյուր զույգի համար հաշվում է այդ զույգը կազմող թվերի գումարը և ստացված գումարները որևէ հերթականությամբ գրում գրափախարակին: Արդյունքում գրափախարակին գրված են լինում հետևյալ 10 թվերը.

17, 20, 28, 42, 28, 36, 14, 39, 25, 31 :

Գտնել Անիի մրապահած թվերից մեծագույնը:

Պատասխան: 25

Լուծում: Ենթադրենք Անին մրապահել է $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ բնական թվերը: Պարզ է, որ այդ թվերից յուրաքանչյուրը մասնակցում է ճիշտ 4 գումարի մեջ, հետևաբար $4(a + b + c + d + e) = 17 + 20 + 28 + \dots + 31 = 280$, ուրեմն $a + b + c + d + e = 70$: Պարզ է նաև, որ գումարներից մեծագույնը պետք է լինի $d + e$ -ն, նվազագույնը՝ $a + b$ -ն, իսկ երկրորդ մեծագույնը՝ $c + e$ -ն: Ուրեմն

$$d + e = 42, a + b = 14, c + e = 39 :$$

Առաջին երկու դարձությունից ստանում ենք, որ $c = 70 - 42 - 14 = 14$, ապա երրորդից, կհետևի $e = 39 - 14 = 25$: