Լուծումներ
10-րդ դասարան

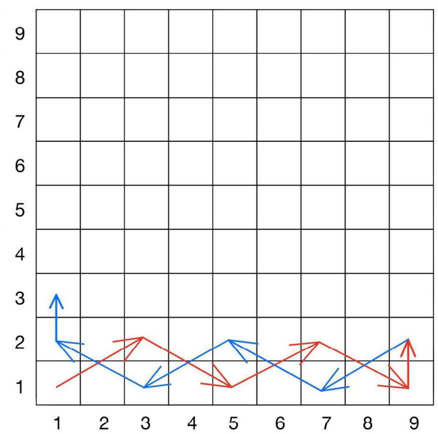
Խնդիր 1:
Լուծում: $1 - ab = a + b$ հավասարության երկու կողմն էլ քառակուսի բարձրացնելով կունենանք $(1-ab)^2 = (a+b)^2$: Մյուս կողմից, $(a+b)^2 \geq 4ab$, քանի որ $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$: Ուրեմն $(1-ab)^2 \geq 4ab$: Վերջին անհավասարությունը ձևափոխելով՝ ստանում ենք $(ab)^2 + 1 \geq 6ab$: Վերջապես երկու կողմն էլ ab-ի վրա բաժանելուց հետո (կարող ենք բաժանել, քանի որ ab-ն դրական է) ստանում ենք պահանջվող անհավասարությունը՝ $ab + \frac{1}{ab} \geq 6$:

Խնդիր 2: Պատասխան: 3
Լուծում: Բնական թվի քառակուսին 5-ի բաժանելիս կարող է միայն տալ $0, 1, 4$ մնացորդներից մեկը:
Առաջին դեպք: $p_1^2 \equiv 4(mod\ 5)$
Ուրեմն, $p_2 = p_1^2 + 6 \equiv 4 + 6 \equiv 0(mod\ \ 5)$, հետևաբար p_2-ը բաժանվում է 5-ի, սակայն $p_2 > 6$, ուրեմն այն չի կարող լինել պարզ, հետևաբար այս դեպքում ստացանք, որ $k \leq 1$:
Երկրորդ դեպք: $p_1^2 \equiv 1(mod\ 5)$
Ուրեմն, $p_2 = p_1^2 + 6 \equiv 1 + 6 \equiv 2(mod\ 5)$, որտեղից էլ $p_3 = p_2^2 + 6 \equiv 4 + 6 \equiv 0(mod\ 5)$: Այս դեպքում էլ ստացանք, որ p_3-ն է բաժանվում 5-ի, սակայն $p_3 > 6$, ուրեմն այն չի կարող լինել պարզ, հետևաբար այս դեպքում էլ ստացանք, որ $k \leq 2$:

Երրորդ դեպք: $p_1^2 \equiv 0(mod\ \ 5)$, հետևաբար p_1-ը բաժանվում է 5-ի վրա և պարզ է, ուրեմն $p_1 = 5$: Տրված բանաձևից ստանում ենք, որ $p_2 = 31,\ p_3 = 967$, ուրեմն դրանք երկուսն էլ պարզ են, սակայն $p_3 \equiv 2(mod\ \ 5)$, հետևաբար $p_4 = p_3^2 + 6 \equiv 4 + 6 \equiv 0(mod\ 5)$, ուրեմն նախորդ դեպքերի նման այստեղ էլ p_4-ը չի կարող լինել պարզ, ուստի, այս դեպքում ունենք, որ $k = 3$, և քանի որ նախորդ դեպքերում ստացել ենք, որ $k \leq 2$, հետևաբար 3-ը k-ի մեծագույն հնարավոր արժեքն է:
Խնդիր 3:
Լուծում: Դիցուք BX-ը հատում է AQ-ն T կետում, իսկ BQ-ն AP-ն՝ S-ում:
$\angle BAC$-ն նշանակենք α: $BP = CQ$, հետևաբար BP և CQ փոքր աղեղներն իրար հավասար են, ուստի BC և PQ փոքր աղեղները նույնպես կլինեն հավասար: Աստեղից՝ $\angle PAQ = \angle BAC = \alpha$:
$\angle BXP = \angle AXT = 90^\circ - \alpha$ (երկրորդ հավասարությունը ստացվում է $\triangle AXT$-ից):
Մյուս կողմից, $\angle BPA = \angle BQA = \angle BCA = 90^\circ - \alpha$: Ուրեմն.
1) $\triangle XBP$-ը հավասարասրուն է,
2) $\triangle ASQ$-ից՝ $\angle ASQ = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$:
Ստացվեց, որ XP հիմքով XBP հավասարասրուն եռանկյան մեջ BS-ը բարձրություն է, հետևաբար նաև XP-ի միջնուղղահայացն է, ուրեմն Q-ն էլ է գտնվում XP-ի միջնուղղահայացի վրա, հետևաբար $\triangle XPQ$-ի մեջ QS-ը կլինի կիսորդ, հետևաբար $\angle XQB = \angle PQB$:

Խնդիր 4: Պատասխան: 2050312
Լուծում: Նոր ֆիգուռն անվանենք կարապ, իսկ աղյուսակի տողերն ու սյուները համարակալենք 1-ից 2025-ով (համարակալումը սկսենք ներքևի

ձախ անկյունից)։ Նախ կառուցենք 2050312 այնպիսի քայլերից բաղկացած հաջորդականություն, որոնց ընթացքում կարապը ամեն վանդակում կհայտնվի առավելագույնը մեկ անգամ։
Սկզբնական պահին կարապին տեղադրենք (1,1) վանդակում և հաջորդաբար կիրառենք ձիու դեպի աջ քայլերը՝ ամեն քայլից հետո փոխելով ուղղաձիգով ուղղությունն այնպես, որ կարապը մնա առաջին երկու տողերից մեկում։ Նման ձևով կհասնենք (1,2025) վանդակին, որից հետո կատարենք մեկ քայլ դեպի վերև։ Կրկին ձիու հորիզոնական, բայց այս անգամ դեպի ձախ քայլերով՝ առանց երրորդ տող անցնելու կարապը հասցնենք (2,1) վանդակ։ Նորից կատարենք մեկ քայլ դեպի վերև և կրկնենք վերը նշված քայլերի հաջորդականությունը՝ 3-րդ և 4-րդ տողերի համար, ապա նորից կատարենք մեկ քայլ դեպի վերև։ Նման ձևով շարունակելով՝ կհասնենք (2024,1) վանդակին, որից հետո կատարենք ևս մեկ քայլ դեպի վերև։ Պարզ է, որ նկարագրված քայլերի հաջորդականությամբ՝ չհաշված վերջին տողը, ամբողջությամբ ծածկել ենք կենտ համարով սյուները և ևս մեկ վանդակ վերջին տողում։ Ուրեմն կարապը հայտնվել է ընդհանուր $1013{\cdot}2024{+}1 = 2050313$ վանդակում, հետևաբար ընդհանուր կատարել ենք 2050312 հատ քայլ։ Ստորև ներկայացված են կարապի քայլերը առաջին և երկրորդ տողերի վրա 9×9 տախտակի դեպքում։



Կարապի հաջորդական քայլերն են $(1,1) \to (2,3) \to (1,5) \to (2,7) \to (1,9) \to (2,9)$;
$(2,9) \to (1,7) \to (2,5) \to (1,3) \to (2,1) \to (3,1)$

Մնում է ցույց տալ, որ հնարավոր չէ կատարել 2050312-ից շատ քայլ՝ առանց նույն վանդակում երկու անգամ հայտնվելու։
Ցանկացած քայլի արդյունքում կարապը կա՛մ մնում է նույն սյան մեջ, կա՛մ տեղափոխվում է 2-ով մեծ կամ փոքր համարով սյուն, հետևաբար կարապը միշտ կգտնվի միևնույն զույգություն ունեցող սյուներում։
Առաջին դեպք: Կարապը միշտ գտնվում է զույգ համարի սյուներից մեկում։
Զույգ համարի սյուներում ընդհանուր կա $1012 \cdot 2025 = 2049300$ վանդակ, հետևաբար այս դեպքում չենք կարողանա կատարել 2050312-ից շատ քայլ։
Երկրորդ դեպք: Կարապը միշտ գտնվում է կենտ համարով սյուներից մեկում։
Դիտարկենք կամայական n այնպիսի քայլերի հաջորդականություն, որոնց ընթացքում կարապը գտնվել է յուրաքանչյուր վանդակում առավելագույնը մեկ անգամ։ Ուրեմն այն ընդհանուր գտնվել է $n{+}1$ իրարից տարբեր վանդակներում։

Նկատենք, որ ցանկացած քայլի արդյունքում կարապը կա՛մ զույգ համարով տողից տեղափոխում է կենտ համարով տող, կա՛մ՝ հակառակը, հետևաբար կարապի ծածկած վանդակներից առնվազն $[\frac{n+1}{2}]$-ը պետք է լինեն զույգ համար ունեցող տողերից մեկում: Ընդհանուր կա $1012 \cdot 1013$ համապատասխանաբար կենտ համարի սյան և զույգ համարի տողում գտնվող վանդակ, հետևաբար $[\frac{n+1}{2}] \leq 1012 \cdot 1013$, ուստի $n+1 \leq 2 \cdot 1012 \cdot 1013+1$, ուրեմն $n \leq 2024 \cdot 1013 = 2050312$, հետևաբար, գոյություն չունի 2050312-ից ավել քայլերից բաղկացած խնդրի պայմաններին բավարարող հաջորդականություն: