Մաթեմատիկայի օլիմպիադայի դպրոցական փուլ, 2024-2025 ուստարի
10-րդ դասարան
Լուծումներ

1. Հայտնի է, որ $x + \frac{3}{x} = 10$: Գտնել $x^2 + \frac{9}{x^2}$ արտահայտության արժեքը:
   1) 106   2) 100   3) 94   4) 97

   Լուծում: Տրված հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի՝ $x^2 + \frac{9}{x^2} + 6 = 100$, որտեղից՝ $x^2 + \frac{9}{x^2} = \mathbf{94}$:

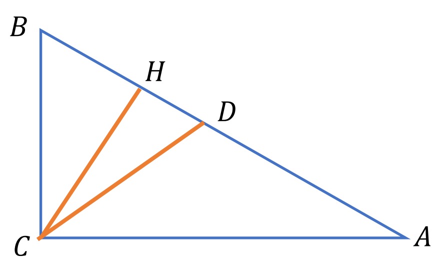
2. Հայտնի է, որ $x^3 - 2x = y^3 - 2y$, $x \neq y$: Գտնել $x^2 + xy + y^2$ արտահայտության արժեքը:
   1) 1   2) 2   3) 4   4) 8

   Լուծում: Ունենք՝ $x^3 - y^3 - 2x + 2y = 0$, որտեղից՝ $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 0$: Քանի որ $x \neq y$, ապա կստանանք՝ $x^2 + xy + y^2 = \mathbf{2}$:

3. A-ն ամենամեծ եռանիշ թիվն է, որն ունի ճիշտ երեք հատ բնական բաժանարար: Գտնել A թվի թվանշանների գումարը:
   1) 13   2) 16   3) 27   4) այլ պատասխան

   Լուծում: Նշենք, որ բնական թիվն ունի ճիշտ երեք հատ բնական բաժանարար այն և միայն այն դեպքում, եթե այն պարզ թվի քառակուսի է: Այսպիսով՝ $A = 31^2 = 961$: Պատասխանը կլինի՝ $9 + 6 + 1 = \mathbf{16}$:

4. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը $21°$ է: Գտնել այդ եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրության և կիսորդի կազմած անկյունը:
   1) $27°$ 2) $26°$ 3) $25°$ 4) $24°$



   Լուծում: Դիցուք ABC-ն այդ ուղղանկյուն եռանկյունն է, ընդ որում՝ $\angle C = 90°, \angle A = 21°$: Դիցուք CH-ը բարձրություն է, իսկ CD-ն՝ կիսորդ: Այդ դեպքում՝ $\angle HCA = 90° - 21° = 69°$: Հետևաբար՝ $\angle HCD = 69° - 45° = \mathbf{24}°$:

5. Գտնել այն բոլոր n ամբողջ թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի x ամբողջ թիվ այնպես, որ $nx + x^2 = 47$:
   1) 0   2) 2   3) 4   4) այլ պատասխան

Լուծում: Ունենք՝ $x(n+x)=47$: Հետևաբար, x-ը 47-ի բաժանարար է: Այստեղից կստանանք՝ $x=\pm1,\pm47$: Տեղադրելով այս արժեքները x-ի փոխարեն, կստանանք $n=\pm46$:

6. Գտնել 10! թվի այն բոլոր բնական բաժանարարների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրը բնական թվի քառակուսի է:

   1) 30   2) 15   3) 25   4) այլ պատասխան

   Լուծում: Ունենք՝ $10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$: Դիցուք ինչ-որ n բնական թվի համար՝ $2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7 \vdots n^2$: Այս պայմանը համարժեք է հետևյալ պայմանին. $2^4\cdot3^2\cdot5 \vdots n$: Հետևաբար այդպիսի n բնական թվերի քանակը կլինի $(4+1)(2+1)(1+1)=30$:

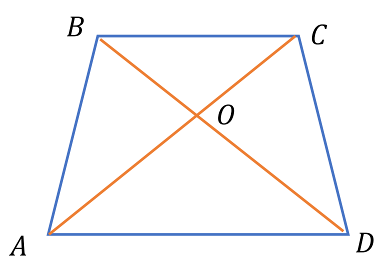
7. Գտնել 5-ի վրա բաժանվող այն բոլոր բնական եռանիշ թվերի քանակը, որոնց նիշերի մեջ կգտնվեն երկուսը, որոնց դրական տարբերությունը հավասար է 7-ի:

   1) 25   2) 28   3) 30   4) այլ պատասխան

   Լուծում: Քանի որ տրված թիվը բաժանվում է 5-ի, ապա նրա վերջին նիշը կամ 0 է, կամ՝ 5: Եթե այն հավասար է 5-ի, ապա առաջին երկու նիշերի դրական տարբերությունը հավասար է 7-ի: Հետևաբար, այդ թվերն են՝ 185, 295, 705, 815, 925: Այսինքն՝ **5** հատ:
   Այժմ, դիտարկենք այն դեպքը, երբ վերջին նիշը 0 է: Այս դեպքում այդպիսի թիվն ունի $\overline{ab0}$ տեսքը: Եթե $a=7$, ապա այդպիսի թվերի քանակը 10 է: Եթե b=7, ապա այդպիսի թվերի քանակը 9 է: Նշենք, որ այս դեպքում 770 թիվը կրկնվում է: Հետևաբար այն բոլոր $\overline{ab0}$ եռանիշ թվերը, որոնց առաջին կամ երկրորդ նիշերից մեկը հավասար է 7-ի, կլինի՝ 10+9-1=**18**:
   Մնում է հաշվել $\overline{ab0}$ տեսքի այն թվերի քանակը, որոնց համար $a\neq7$, $b\neq7$ և $|a-b|=7$: Այդ թվերն են 180, 290, 810, 920: Այսինքն՝ 4 հատ:
   Այսպիսով, խնդրի պատասխանը կլինի՝ $5+18+4=\mathbf{27}$:

8. AD և BC հիմքերով սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Հայտնի է, որ AOD եռանկյան մակերեսը 9 անգամ մեծ է BOC եռանկյան մակերեսից: Քանի՞ անգամ է այդ սեղանի մեծ հիմքը մեծ այդ սեղանի միջին գծից:

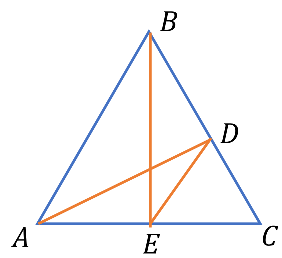
   1) 2   2) 1,8   3) 1,5   4) այլ պատասխան



   Լուծում: Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, $\Delta AOD\sim\Delta COB$: Հետևաբար՝ $\left(\frac{AD}{BC}\right)^2=\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}}=9$, որտեղից՝ $\frac{AD}{BC}=3$, այսինքն՝ $AD=3BC$: Այսպիսով, $ABCD$ սեղանի միջին գծի երկարությունը հավասար է $\frac{AD+BC}{2} = 2BC$: Հետևաբար, սեղանի մեծ հիմքի և միջին գծի երկարությունների քանորդը կլինի $\frac{3BC}{2BC} = \mathbf{1,5}$:

9. $AC = 10$ հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ տարված են AD բարձրությունը և BE կիսորդը ($D \in BC,\ E \in AC$): Գտնել DE հատվածի երկարությունը:

   1) 5 2) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 3) $5\sqrt{3}$ 4) հնարավոր չէ որոշել



   Լուծում: Քանի որ ADC-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ապա նրա AC ներքնաձիգին տարված DE միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին: Այսինքն՝ $DE = \frac{AC}{2} = 5$:

10. Գտնել $x - [\sqrt{x}]^2 = 4$ հավասարման 40-ից փոքր արմատների գումարը ($[a]$-նշանակում ենք a թիվը չգերազանցող առավելագույն ամբողջ թիվը, օրինակ՝ $[4.5] = 4$):

   1) 21 2) 41 3) 70 4) 75

   Լուծում: Նշանակենք՝ $[\sqrt{x}] = n$ ($n \in Z,\ n \geq 0$): Այսպիսով՝ $x - n^2 = 4$, այսինքն՝ $x = n^2 + 4$: Մեզ անհրաժեշտ է գտնել n ամբողջ թվի այն արժեքները, որոնց համար՝ $[\sqrt{n^2+4}] = n$: Այս հավասարումը համարժեք է հետևյալ պայմանին՝ $n \leq \sqrt{n^2+4} < n+1$: Լուծելով այս անհավասարությունները, ստանում ենք՝ $n \geq 2$: Հետևաբար տրված հավասարման արմատներն են $x = n^2 + 4$ տեսքի թվերը, որտեղ n-ը 1-ից տարբեր ցանկացած բնական թիվ է: Քանի որ մեզ անհրաժեշտ են միայն 40-ից փոքր արմատները, ապա $2 \leq n \leq 5$: Այսպիսով, ստանում ենք 40-ից փոքր չորս հատ արմատ՝ 8, 13, 20, 29: Նրանց գումարը կլինի՝ **70**:

11. Գտնել 50-ից փոքր այն բոլոր a բնական թվերի քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի x ամբողջ թիվ, որ $4a - 3x = 1$:

   1) 16 2) 17 3) 18 4) 19

   Լուծում: Հաշվի առնելով, որ $4a - 3x = 1$, ստանում ենք՝ $a = 3x - 3a + 1$, հետևաբար a թիվը 3-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ: Ընդ որում, ցանկացած a թվի համար, որը 3-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ, միշտ գոյություն ունի x ամբողջ թիվ, որ տեղի ունենա նշված պայմանը: Այսպիսով, մեզ մնում է հաշվել 50-ից փոքր այն բոլոր բնական թվերի քանակը, որոնք 3-ի բաժանելիս տալիս են 1 մնացորդ: Այդ թվերն են՝ 1, 4, 7, ..., 49: Նրանց քանակը **17** է:

12. Դիցուք r-ը այն ամենափոքր իրական թիվն է, որի համար գոյություն ունեն x և y իրական թվեր այնպես, որ տեղի ունենան $x + y + r = 3, x^2 + y^2 + r^2 = 12$ հավասարությունները: Հայտնի է, որ r թիվը հնարավոր է ներկայացնել $r = a - \sqrt{b}$ տեսքով, որտեղ a, b-ն բնական թվեր են: Գտնել $a + b$ արտահայտության արժեքը:

   1) 5 2) 7 3) 9 4) 11

Լուծում: Առաջին եղանակ: Լուծենք նշված հավասարումների համակարգը x, y-ի նկատմամբ: Առաջին հավասարումից՝ $y = 3 - r - x$: Ստացվածը տեղադրելով երկրորդի մեջ ստանում ենք քառակուսային հավասարում x-ի նկատմամբ՝

$$x^2 + (3 - r - x)^2 + r^2 - 12 = 0,$$

$$2x^2 - 2(3 - r)x + 2r^2 - 6r - 3 = 0$$

Խնդրի պայմանը համարժեք է նրան, որ ստացված քառակուսային հավասարումն ունենա իրական արմատ: Այսինքն, նրա տարբերիչը՝ $D \geq 0$: Այսպիսով՝

$$D = 4(3 - r)^2 - 8(2r^2 - 6r - 3) \geq 0,$$
$$r^2 - 2r - 5 \leq 0$$

Լուծելով այս անհավասարումը ստանում ենք՝ $r \in [1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}]$: Հետևաբար, r-ի փոքրագույն արժեքը կլինի $1 - \sqrt{6}$: Խնդրի պատասխանը կլինի՝ $1 + 6 = \mathbf{7}$:

Երկրորդ եղանակ: Ունենք՝ $(3 - r)^2 = (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 24 - 2r^2$: Հետևաբար՝ $9 - 6r + r^2 \leq 24 - 2r^2$, այսինքն՝ $r^2 - 2r - 5 \leq 0$, որտեղից՝ $1 - \sqrt{6} \leq r \leq 1 + \sqrt{6}$: Մնում է ստուգել, որ $r = 1 - \sqrt{6}$ թիվը բավարարում է խնդրի պայմանին: Վերցնելով $x = y = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ կարող ենք համոզվել, որ նշված հավասարությունները ճիշտ են:

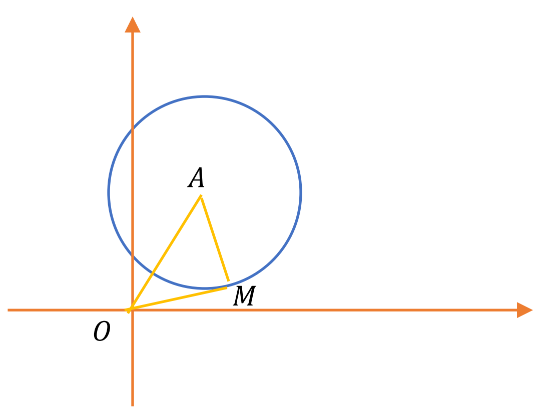
13. Տրված է այնպիսի p պարզ թիվ ($p > 0$), որի համար հայտնի է, որ $x^3 - 12x - p = 0$ հավասարման արմատներից մեկն ամբողջ թիվ է: Գտնել այդ հավասարման մյուս երկու արմատների գումարը:

1) 1 2) 0 3) -1 4) այլ պատասխան

Լուծում: Դիցուք x_0-ն տրված հավասարման ամբողջ արմատ է: Ունենք՝ $x_0(x_0^2 - 12) = p$: Հետևաբար՝ x_0-ն p-ի բաժանարար է: Այսինքն՝ $x_0 = \pm 1, \pm p$: Տեղադրելով այս չորս արժեքները նշված հավասարման մեջ, ստանում ենք, որ միայն $x_0 = -1$ դեպքն է բավարարում: Այս դեպքում $p = 11$: Հետևաբար՝ $x^3 - 12x - 11 = 0$, այսինքն՝ $(x + 1)(x^2 - x - 11) = 0$: Հետևաբար տրված հավասարման ոչ ամբողջ արմատները $x^2 - x - 11 = 0$ հավասարման արմատներն են: Նրանց գումարն ըստ Վիետի թեորեմի կլինի **1** (նշենք, որ այդ քառակուսային հավասարումն ունի երկու իրական, ոչ ամբողջ արմատներ):

14. Դիցուք M կետը $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ հավասարումով տրված շրջանագծի այնպիսի կետ է, որ OM ուղիղը շոշափում է այդ շրջանագծին (O-ն կոորդինատային հարթության սկզբնակետն է): Գտնել OM հատվածի երկարության քառակուսին:

1) 2 2) 3 3) 4 4) այլ պատասխան



Լուծում: Նշված հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝ $(x-1)^2+(y-2)^2=2$: Այստեղից, ստանում ենք, որ նրա գրաֆիկը $A(1;2)$ կենտրոնով, $\sqrt{2}$ շառավղով շրջանագիծ է: Ունենք՝ $OA=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$: Այստեղից, ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $OM^2=OA^2-AM^2=\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2=\mathbf{3}$:

15. O սկզբնակետով կոորդինատային հարթության վրա տրված է $A(2;\ 1)$ կետը: A կետը պտտել են O կետի նկատմամբ $60°$-ով և ստացել են $A'(a,b)$ կետը: Գտնել $8a+4b$ արտահայտության արժեքը:
    1) 5 2) -5 3) 10 4) այլ պատասխան

    Լուծում: Ունենք՝ $\overrightarrow{OA}=\{2;1\}, \overrightarrow{OA'}=\{a;b\}$: Այս վեկտորների սկալար արտադրյալը կլինի՝ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=2a+b$: Մյուս կողմից՝ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OA'}|cos60°$: Ունենք նաև, որ $|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$: Այսպիսով՝ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=2{,}5$: Հետևաբար՝ $8a+4b=4(2a+b)=\mathbf{10}$:

16. Գտնել 7-ին բազմապատիկ այն բոլոր բնական եռանիշ n թվերի քանակը, որոնց համար $2^{n^2}+2^n+1$ թիվը բաժանվում է 7-ի վրա:

    Լուծում: Դիտարկենք երեք դեպք:

    I դեպք: Եթե $n=3k\ (k\in N)$, ապա $2^{n^2}+2^n+1=2^{9k^2}+2^{3k}+1=8^{3k^2}+8^k+1$, որը 7-ի բաժանելիս տալիս է 3 մնացորդ:

    II դեպք: Եթե $n=3k+1\ (k\in Z, k\geq 0)$, ապա
    $$2^{n^2}+2^n+1=2^{9k^2+6k+1}+2^{3k+1}+1=2\cdot 8^{3k^2+2k}+2\cdot 8^k+1,$$
    որը 7-ի բաժանելիս տալիս է 5 մնացորդ:

    III դեպք: Եթե $n=3k+2\ (k\in Z, k\geq 0)$, ապա
    $$2^{n^2}+2^n+1=2^{9k^2+12k+4}+2^{3k+2}+1=2\cdot 8^{3k^2+4k+1}+4\cdot 8^k+1,$$
    որը բաժանվում է 7-ի:

    Այսպիսով, միայն $n=3k+2\ (k\in Z, k\geq 0)$ տեսքի թվերի համար $2^{n^2}+2^n+1$ թիվը բաժանվում է 7-ի վրա: Քանի որ n թիվը ևս պետք է բաժանվի 7-ի վրա, ապա այստեղից կստանանք, որ k-ն 7-ի բաժանելիս տալիս է 4 մնացորդ: Այսինքն՝ $k=7m+4\ (m\in N)$: Հետևաբար, $n=21m+14$: Հաշվի առնելով, որ n-ը եռանիշ է, կստանանք՝ $100\leq 21m+14<1000$, որտեղից՝ $5\leq m\leq 46$: Այսպիսով, նշված պայմանին բավարարող n բնական եռանիշ թվերի քանակը կլինի $46-4=\mathbf{42}$:

    Պատ.՝ 42:

17. Ա, Բ, Գ, Դ, Ե, Զ, Է, Ը, Թ տառերին համապատասխանող վանդակներից յուրաքանչյուրն անհրաժեշտ է ներկել կարմիր, կապույտ, նարնջագույն գույներից մեկով այնպես, որ ցանկացած երկու հարևան վանդակներ նույն գույնով ներկված չլինեն: Ընդ որում յուրաքանչյուր գույն կիրառվում է ճիշտ երեք հատ վանդակ ներկելու համար: Ամենաշատը քանի՞ եղանակով է հնարավոր կատարել ներկումը: [Երկու վանդակ կոչվում են իրար հարևան, եթե նրանք ունեն ընդհանուր կողմ]:

Ա	Բ	Գ
Դ	Ե	Զ
Է	Ը	Թ

Լուծում: Ունենք, որ Ե-ի հետ նույն գույն ունեցող վանդակները կամ անկյունագծորեն հակադիր են, կամ մի տողի վրա են (եզրային վանդակները) կամ մի սյան վրա են (եզրային վանդակները): Դիտարկենք երկու դեպք:

I դեպք: Ե-ի հետ նույն գույն ունեցող վանդակները անկյունագծորեն հակադիր են: Այս դեպքում Ա=Ե=Թ կամ Գ=Ե=Ը: Դիտարկենք միայն Ա=Ե=Թ դեպքը, որից հետո կբազմապատկենք 2-ով: Եթե Է=Գ, ապա Բ=Դ=Զ=Ը, որը հնարավոր չէ: Այսպիսով,

Ա=Ե=Թ, Է=Բ=Զ, Գ=Դ=Է

Այս դեպքում ունենք ընտրության $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ հնարավորություն: Այսպիսով, այս դեպքում ստանում ենք $2 \cdot 6 = 12$:

II դեպք: Ե-ի հետ նույն գույն ունեցող վանդակները մի տողի վրա են (եզրային վանդակները): Դիտարկենք այդպիսի համանման դեպքերից մեկը՝ Ա=Ե=Գ (արդյունքը կբազմապատկենք 4-ով): Ունենք, որ Դ≠Է, Ը≠Է, հետևաբար՝ Դ=Ը: Նույն ձևով՝ Զ=Ը: Այսպիսով՝

Ա=Ե=Գ, Դ=Զ=Ը, Է=Բ=Թ:

Այս դեպքում ունենք ընտրության $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ հնարավորություն: Այսպիսով, այս դեպքում ստանում ենք $4 \cdot 6 = 24$:

Միացնելով այս երկու դեպքերը ստանում ենք՝ 12+24=36:

Պատ.՝ 36:

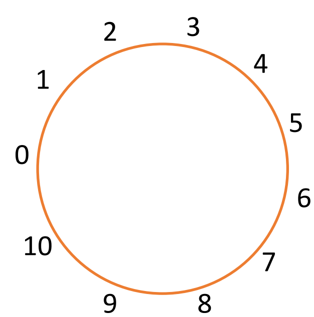
18. Շրջանագծի վրա նշված է հինգ կետ՝ A, B, C, D, E: Այդ հինգ կետերը զույգ առ զույգ միացված են հատվածներով: Հատվածներից որոշները ներկված են կարմիր, իսկ մնացածը՝ նարնջագույն: Ընդ որում ներկումը կատարվում է այնպես, որ նշված հինգ A, B, C, D, E կետերից ցանկացած երեքում գագաթներ ունեցող եռանկյունը միագույն չլինի (նրա կողմերից երկուսը մի գույնի են, իսկ երրորդ կողմը՝ այլ գույնի): Նշանակենք K-ով կարմիր հատվածների քանակը, իսկ N-ով՝ նարնջագույն հատվածների քանակը: Դիտարկվում են բոլոր այդպիսի ներկումները: Գտնել $K - N$ արտահայտության բոլոր հնարավոր արժեքների քանակը:

Լուծում: Դիտարկենք A գագաթից դուրս եկող գծերը՝ AB, AC, AD, AE: Ենթադրենք նրանց մեջ կան երեք հատ, որոնք նույն գույնի են (առանց ընդհանրությունը խախտելու, ենթադրենք AB, AC, AD-ն կարմիր են): Քանի որ ABC, ACD, ABD եռանկյունները միագույն չեն, ապա BC, BD, CD հատվածները նարնջագույն են, որը հակասություն է (քանի որ ըստ խնդրի պայմանի BCD եռանկյունը միագույն չէ): Այսպիսով, A գագաթից դուրս եկող հատվածների մեջ չկան երեք հատ միագույն հատվածներ: Դա նշանակում է, որ նրանցից երկուսը կարմիր են, երկուսը՝ նարնջագույն:

Նույն ձևով, կարող ենք համոզվել, որ ցանկացած գագաթից դուրս եկող կարմիր և նարնջագույն հատվածների քանակները հավասար են: Այսպիսով՝ $K = N$, այսինքն՝ $K - N = 0$ խնդրի պայմանին բավարարող ցանկացած ներկման դեպքում:

Պատ.՝ 1:

19. Գտնել $A = \{0,1,2,3, \dots ,10\}$ բազմության առնվազն երեք տարր պարունակող այն բոլոր X ենթաբազմությունների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրում գոյություն չունենան այնպիսի a, b թվեր, որ $a - b - 1$ թիվը բաժանվի 11-ի:



Լուծում: A բազմության թվերը պատկերենք շրջանագծի վրայի 11 հատ կետերի տեսքով (նշված հերթականությամբ): Նշված պայմանը նշանակում է, որ X բազմության մեջ գտնվող կետերը իրար հարևան չեն: Նշենք, որ X բամզությունը կարող է պարունակել առավելագույնը 5 տարր:

Սկզբում հաշվենք 3-տարրանի X ենթաբազմությունների քանակը: Նախ հաշվենք 0 տարրը պարունակող քանի՞ հատ այդպիսի 3-տարրանի բազմություն կա: Ունենք՝ $X = \{0, a, b\}$, որտեղ՝ $2 \le a < b \le 9, a + 1 < b$: Դիտարկենք $(0, a - 1, b - 2)$ եռյակը, որի համար՝ $0 < a - 1 < b - 2 \le 7$: Նկատենք, որ $0 < u < v \le 7$ պայմանին բավարարող կամայական $(0, u, v)$ եռյակի միջոցով կարելի է ստանալ X բազմություն՝ $X = \{0, u + 1, v + 2\}$ բանաձևով: Այսպիսով, 0-ն պարունակող և նշված պայմանին բավարարող X ենթաբազմությունների քանակը հավասար է $0 < u < v \le 7$ պայմանին բավարարող կամայական $(0, u, v)$ եռյակների քանակին: Նրանց քանակը՝ $C_7^2 = 21$: Նշենք, որ 0-ի փոխարեն կարող ենք ընտրել կամայական k թիվ: Հետևաբար, k կետը պարունակող և հարևան կետեր չպարունակող 3-տարրանի բոլոր X ենթաբազմությունների քանակը կլինի 21: Նշենք, որ այս քանակները իրար գումարելով յուրաքանչյուր X բազմություն կհաշվենք 3 անգամ: Հետևաբար, նրանց ընդհանուր քանակը կլինի՝ $\frac{11 \cdot 21}{3} = 77$:

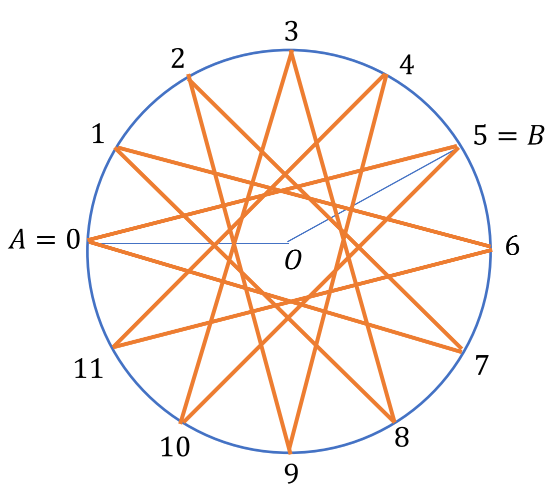
Համանման ձևով կհաշվենք 4-տարրանի հարևան կետեր չպարունակող ենթաբազմությունների քանակը՝ $\frac{11 \cdot C_6^3}{4} = 55$:

Նույն կերպ նաև 5-տարրանիների դեպքում՝ $\frac{11 \cdot C_5^4}{5} = 11$:

Այսպիսով, ստանում ենք՝ $77 + 55 + 11 = 143$:

Պատ.՝ 143:

20. Տրված է O կենտրոնով շրջանագիծ: Շրջանագծի XY և YZ լարերի զույգն անվանենք «լուսային զույգ», եթե YO ճառագայթը XYZ անկյան կիսորդն է: Հայտնի է, որ լույսի ճառագայթն սկսելով շրջանագծի X կետից, և շարժվելով XY լարի ուղղությամբ, հասնելով Y կետին անդրադառնում է XY ճառագայթի հետ «լուսային զույգ» կազմող YZ ճառագայթի ուղղությամբ: Շրջանագծի վրա տրված է երկու կետ՝ A և B այնպես, որ AB լարի երկարությունը 1 սմ է, $\angle ABO = 15°$: Լույսի ճառագայթն սկսում է շարժվել A կետից AB լարի ուղղությամբ և հասնելով շրջանագծի հաջորդ կետին անդրադառնում է վերը նշված ձևով: Լույսը շարունակում է անվերջ շարժվել: Հայտնի է, որ լույսն ինչ-որ պահին վերադառնում է A կետին: Գտնել լույսի սկզբնակետից՝ A-ից դուրս գալուց հետո մինչև առաջին անգամ A կետին վերադառնալը անցած հետագծի երկարությունը (արտահայտված սանտիմետրերով):



Լուծում: Շրջանագիծը սկսած A կետից բաժանենք 12 հավասար մասերի: Բաժանման կետերը համարակալենք $0, 1, 2, 3, \ldots, 11$ թվերով ($A = 0$): Քանի որ $\angle ABO = \angle BAO = 15°$, ապա $\angle AOB = 150°$: Հետևաբար B կետը գտնվում է 5 կամ 7 համարն ունեցող կետում (առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ այն 5 համարն ունեցող կետում է): Լույսի ճառագայթն սկսում է շարժվել 05 լարի ուղղությամբ, որից հետո այն շարունակում է $5 \to 10$ ուղղությամբ և այդպես շարունակ: Հետևյալ ճանապարհը լույսի ճառագայթի հետագիծն է $A = 0$ սկզբնակետից դուրս գալուց հետո մինչև առաջին անգամ A վերադառնալը՝

$$0 \to 5 \to 10 \to 3 \to 8 \to 1 \to 6 \to 11 \to 4 \to 9 \to 2 \to 7 \to 0$$

Այսպիսով, այդ հետագծի երկարությունը կլինի 12 սմ:

Պատ.՝ 12: