IX դասարան

1) **Ա-1, Բ-1** Դիցուք x, y, z թվերը բնական են: Հայտնի է, որ $x^3y^5z^6$ թիվը բնական թվի տասնմեկ աստիճան է: Ապացուցեք, որ $x^2y^7z^4$ թիվը ինչ-որ բնական թվի տասնմեկ աստիճան է:

Լուծում 1: Դիցուք p պարզ թիվը x, y, z թվերի վերլուծության մեջ մտնում է a,b,c աստիճանացույցերով: Այդ դեպքում՝ $3a+5b+6c \vdots 11$: +2 միավոր

Պետք է ապացուցել, որ $2a+7b+4c \vdots 11$: Քանի, որ
$8(3a+5b+6c) = 11(2a+3b+4c)+2a+7b+4c$ և $8(3a+5b+6c) \vdots 11$ և $11(2a+3b+4c) \vdots 11$, հետևաբար $2a+7b+4c \vdots 7$: 7 միավոր

Դիտողություն: Եթե խնդիրը բերվել է a,b,c թվերի որևէ գծային կոմբինացիաի, որը բաժանվում է 11-ի: + 1 միավոր

Լուծում 2: Դիցուք $x^3y^5z^6 = a^{11}$: Այդ դեպքում
$a^{88} = \left(a^{11}\right)^8 = \left(x^3y^5z^6\right)^8 = x^{24}y^{40}z^{48} = \left(x^2y^3z^4\right)^{11} \cdot x^2y^7z^4$ հետևաբար $x^2y^7z^4 = b^{11}$:

7 միավոր

Դիտողություն: Եթե ստացվել է $x^qy^rz^t$ տեսքի թիվ, որը որևէ բնական թվի տասնմեկ աստիճան է: 3 միավոր

2) **Ա-2, Բ-3** Գտեք 2017-ի բաժանվող այն 12-անիշ թվերի քանակը, որոնց վերջին չորս թվանշանները ջնջելիս ստացված 8- անիշ թիվը բաժանվում է 2017-ի, իսկ վերջին յոթ թվանշանները ջնջելիս ստացված 5- անիշ թիվը նույնպես բաժանվում է 2017-ի:

Լուծում : Քանի, որ 12-անիշ առաջին հինգ և ութ թվանշաններով կազմված թիվը բաժանվում է 2017-ի, հետևաբար նրա վեցերորդ, յոթերորդ և ութերորդ թվանշանները 0-ն են: + 1 միավոր

Քանի, որ $10^4 \leq 2017k < 10^5$, որտեղից $5 \leq k < 50$, հետևաբար 2017-ին բազմապատիկ հնգանիշ թվերի քանակը 45 է: + 2 միավոր

Քանի, որ 12-անիշ թիվը բաժանվում է 2017-ի, հետևաբար նրա վերջին չորս թվանշաներով կազմված **թիվը** նույնպես բաժանվում է 2017-ի, հետևաբար այն կարող է լինել՝ 0000, 2017, 4034, 6051, 8068:

+ 2 միավոր

Քանի, որ առաջին հինգ թվանշաններից կազմված ֆիքսած յուրաքանչյուր թվին համապատասխանում է 0000, 2017, 4034, 6051, 8068 **թվեր**-ից յուրաքանչյուրը, հետևաբար խնդրի պայմաններին բավարարում է $45 \cdot 5 = 225$ թիվ:
+ 2 միավոր

Դիտողություն: Եթե գրված չէ 0000, 2017, 4034, 6051, 8068 **թվեր**-ից որևէ մեկը:

- 1 միավոր

3) **Բ-2** Ապացուցել, որ ցանկացած իրական a, b, c թվերի համար $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ և $cx^2 + 2ax + b = 0$ հավասարումներից գոնե մեկը կունենա իրական արմատ:
Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն, համարելով որ ոչ մի հավասարում չունի իրական արմատ +1միավոր

Հետևաբար երեք հավասարումների դիսկրիմինանտներն էլ բացասական են

+1 միավոր

Հետևաբար $a^2 < bc$, $b^2 < ac$ և $c^2 < ab$ +2 միավոր

Բազմապատկելով այդ երեք անհավասարումները

Կստանանք, որ $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$ +2միավոր

Գալ հակասության և ավարտել խնդիրը +1միավոր

4) **Ա-3** Դիցուք $a,b,c>0$ և $(a+c)\left(b^2+ac\right)=4a$ ։ Ապացուցեք, որ $b+c\le 2$։

Լուծում 1: $4a=(a+c)\left(b^2+ac\right)=a\left(b^2+c^2\right)+c\left(b^2+a^2\right)\ge a\left(b^2+c^2\right)+2cab=a(b+c)^2\Rightarrow$

$(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$,քանի, որ $b,c>0$։

Լուծում 2:

$(a+c)\left(b^2+ac\right)=4a\Rightarrow \dfrac{4}{a+c}=\dfrac{b^2}{a}+c=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{c}\ge\dfrac{(b+c)^2}{a+c}\Rightarrow(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$, քանի, որ $b,c>0$։

Եթե տրվել է որևէ գնահատական 1 միավոր

Եթե տրվել է $b+c$ -ի որևէ գնահատական 3 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

Լուծում 3: $(a+c)\left(b^2+ac\right)=4a\Leftrightarrow c\cdot a^2+\left(b^2+c^2-4\right)\cdot a+b^2c=0$, որը a -ից կախված քառակուսի հավասարում է, որի լուծում ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է՝ $D=\left(b^2+c^2-4\right)^2-4b^2c^2\ge 0\Leftrightarrow\left|b^2+c^2-4\right|\ge 2bc$ ։ Քանի, որ $c\cdot a^2+\left(b^2+c^2-4\right)\cdot a+b^2c=0$ հավասարման a_1,a_2 արմատներից որևէ մեկը դրական է, իսկ $a_1a_2=\dfrac{b^2a}{c}>0$, հետևաբար $a_1>0,a_2>0$ ։ Այդ դեպքում $a_1+a_2=\dfrac{4-b^2-c^2}{c}>0$, որտեղից $b^2+c^2<4$,հետևաբար
$\left|b^2+c^2-4\right|\ge 2bc\Leftrightarrow 4-b^2-c^2\ge 2bc\Rightarrow(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$, քանի, որ $b,c>0$։

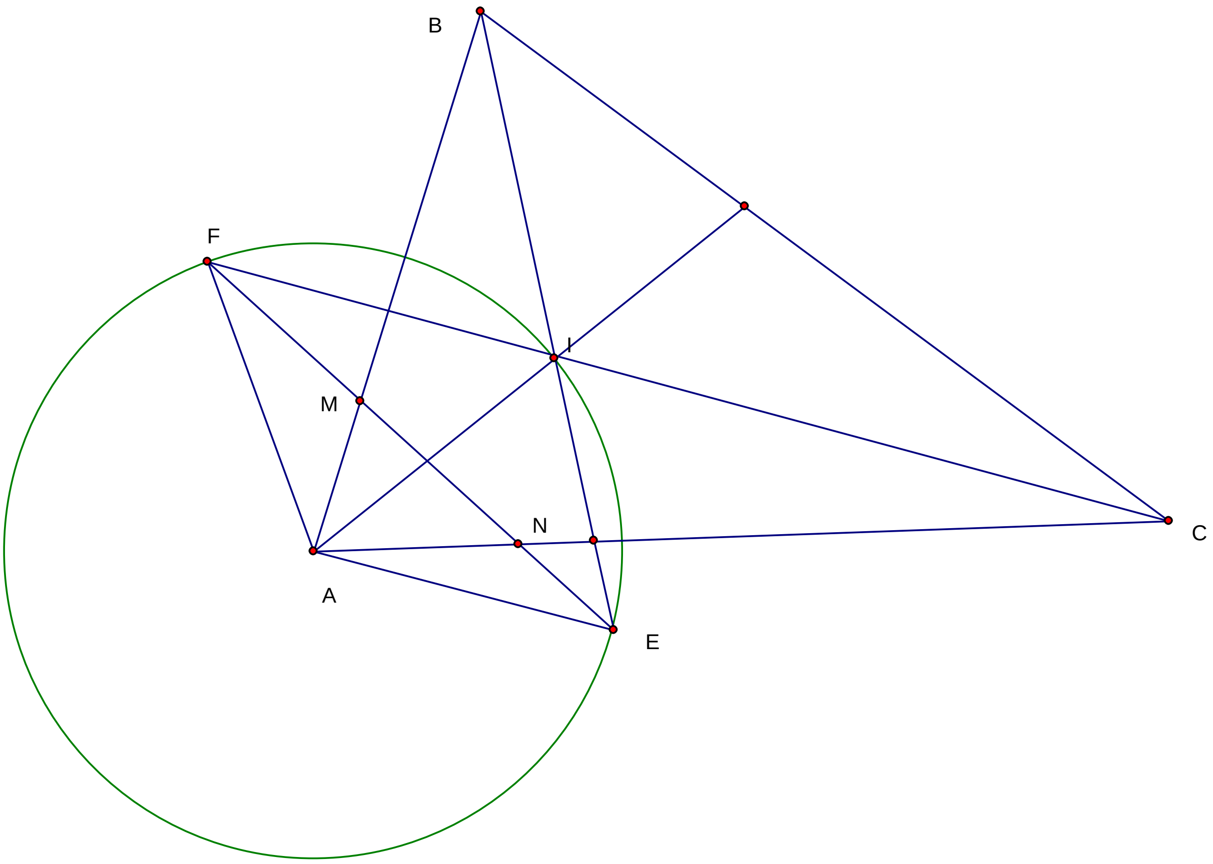
Գրված է քառակուսի հավասարան լուծում ունենալու պայմանը:

+ 2 միավոր

Ապացուցված է, որ $b^2+c^2<4$ + 2 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

5) **Ա-4, Բ-4** I –ն ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: A կենտրոնով և IA շառավիղով շրջանագիծը CI և BI ուղիղները համապատասխանաբար հատում են I –ից տարբեր F և E կետերում: Դիցուք EF ուղիղը AB և AC հատվածները հատում են համապատասխանաբար M և N կետերում: Ապացուցեք, որ $CN+BM=EF+MN$:



Լուծում : Դիցուք $\angle A=2\alpha, \angle B=2\beta, \angle C=2\gamma$: Այդ դեպքում

$\angle AEI=\angle AIE=\alpha+\beta \Rightarrow \angle IAE=180^{\circ}-2\alpha-2\beta=2\gamma$,իսկ $2\gamma=\angle IAE=2\angle EFI$ (միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ և կենտրոնական անկյուններ), որտեղից

$\angle EFC=\gamma=\angle FCN \Rightarrow FN=NC$: Քանի, որ $\angle AFI=\angle AIF=\alpha+\gamma$ և

$\angle EFC=\gamma \Rightarrow \angle AFE=\alpha=\angle AEF$: Քանի, որ $\angle AEI=\alpha+\beta$ և

$\angle AEF=\alpha \Rightarrow \angle MEB=\beta=\angle ABI \Rightarrow BM=ME$, ուստի

$BM+CN=ME+FN=MN+NE+FM+MN=EF+MN$:

$\angle IAE=180^{\circ}-2\alpha-2\beta=2\gamma$ + 1 միավոր

$\angle EFC=\gamma$ + 1 միավոր

$FN=NC$ + 1 միավոր

$BM=ME$ + 2 միավոր

$CN+BM=EF+MN$ + 2 միավոր