XI- XII դասարան

1) **Ա-1, Բ-1** Ոչ զրոյական թվանշաններից կազմված տասանիշ թվի թվանշաններից ջնջել են կամայական վեցը և ստացված քառանիշ թվերը գումարել: Կարո՞ղ է արդյոք այդ գումարը հավասար լինել 2017000 :

Լուծում: Դիցուք a–ն 10-անիշ թվի թվանշաններից մեկն է: a թվանշանը պարունակող ստացված քառանիշ թվերի քանակը հավասար է $C_9^3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$:

\+ 3 միավոր

100a, 10a, a թվերը 3-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները հավասար են:
\+ 2 միավոր

Քանի, որ a–ն մասնակցում է 84 քառանիշ թվերի գրառմանը և a-ն կամայական է, հետևաբար ստացված քառանիշ թվերը գումարը բաժանվում է 3-ի, իսկ 2017000-ը չի բաժանվում 3-ի: + 2 միավոր

***Դիտողություն:** Եթե գրված է ստացված քառանիշ թվերի քանակը $C_{10}^4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210$: 1 միավոր

2) **Ա-2, Բ-3** Դիցուք $a, b, c > 0$ և $a^3 + b^3 + c^3 + 1 = 4abc$: Ապացուցեք, որ $(4a-3)(4b-3)(4c-3) \ge abc$:

Լուծում 1: $4abc = a^3 + b^3 + c^3 + 1 \ge a^3 + 3\sqrt[3]{b^3 \cdot c^3 \cdot 1} = a^3 + 3bc \Rightarrow bc(4a-3) \ge a^3 \Rightarrow 4a - 3 \ge \dfrac{a^3}{bc}$:

Նմանապես $4b - 3 \ge \dfrac{b^3}{ac}$ և $4c - 3 \ge \dfrac{c^3}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները կստանանք՝ $(4a-3)(4b-3)(4c-3) \ge \dfrac{a^3}{bc}\dfrac{b^3}{ac}\dfrac{c^3}{ab} = abc$:

Լուծում 2: $4a = \dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{1}{bc} \ge \dfrac{a^3}{bc} + 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{c} \cdot \dfrac{c^2}{b} \cdot \dfrac{1}{bc}} = \dfrac{a^3}{bc} + 3 \Rightarrow 4a - 3 \ge \dfrac{a^3}{bc}$: Նմանապես $4b - 3 \ge \dfrac{b^3}{ac}$ և $4c - 3 \ge \dfrac{c^3}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները կստանանք՝ $(4a-3)(4b-3)(4c-3) \ge \dfrac{a^3}{bc}\dfrac{b^3}{ac}\dfrac{c^3}{ab} = abc$:

Եթե տրվել է որևէ գնահատական 1 միավոր

Եթե տրվել է $4a - 3$-ի որևէ գնահատական 2 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

3) **Բ-2** Դիցուք a, b, cամբողջ թվերն այնպիսին են, որ $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ հավասարումն ունի երեք իրարից տարբեր արմատներ, ընդ որում այդ արմատներից առաջինը հավասար է որևէ անկյան սինուսի, երկրորդ արմատը հավասար է այդ նույն անկյան կոսինուսի, իսկ երրորդ արմատը հավասար է այդ նույն անկյան կոտանգենսի: Գտնել այդ պայմաններին բավարարող բոլոր հավասարումները:

Լուծում: Դիցուք այդ հավասարման լուծումներն են $sin\alpha, cos\alpha, ctg\alpha$ թվերը: Այդ դեպքում հավասարումը արտադրիչների կվերլուծվի հետևյալ կերպ

$$2(x - sin\alpha)(x - cos\alpha)(x - ctg\alpha) = 0$$

1 միավոր

Բացելով փակագծերը կստանանք, որ

$$2x^3 - 2x^2\,(sin\alpha + cos\alpha + ctg\alpha) +$$

$$2x(sin\alpha cos\alpha + sin\alpha ctg\alpha + cos\alpha ctg\alpha) - 2sin\alpha cos\alpha ctg\alpha = 0$$

+1 միավոր

Այստեղից կստացվի, որ $\cos^2\alpha = \frac{-c}{2}$ +1 միավոր

Քանի որ c-ն ամբողջ թիվ է, ապա $c = 0, c = 1$ կամ $c = 2$ +1 միավոր

$cos\alpha = 1$ հնարավոր չէ, քանի որ $ctg\alpha$ իմաստ չի ունենա

Իսկ $cos\alpha = 0$ անհնար է, քանի որ արմատները տարբեր են +1 միավոր

Ստանալ որ միակ հավասարումն էր $2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ +2 միավոր

4) **Ա-3** Դիցուք $n = d_1 > d_2 > d_3 > \cdots > d_p = 1$ թվերը n բնական թվի բաժանարարներն են: Գտեք բոլոր n բնական թվերը այնպես, որ $d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{p-1} d_p = n - 1$:

Լուծում: Եթե n–ը լրիվ քառակուսի չէ, ապա նրա բաժանարարները կարելի է բաժանել $\left(d, \frac{n}{d}\right)$ զույգերի, հետևաբար $\left(d, \frac{n}{d}\right)$ –ի բաժանարարների քանակը զույգ է՝ $p = 2m$: +1 միավոր

Այդ դեպքում
$$n - 1 = d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{p-1} d_p = d_1 - (d_2 - d_3) - \cdots - (d_{2m-2} - d_{2m-1}) - d_{2m} \le n - m,$$
որտեղից $m = 1$, այսինքն n–ը պարզ թիվ է: Պարզ է, որ բոլոր պարզ թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին: +2 միավոր

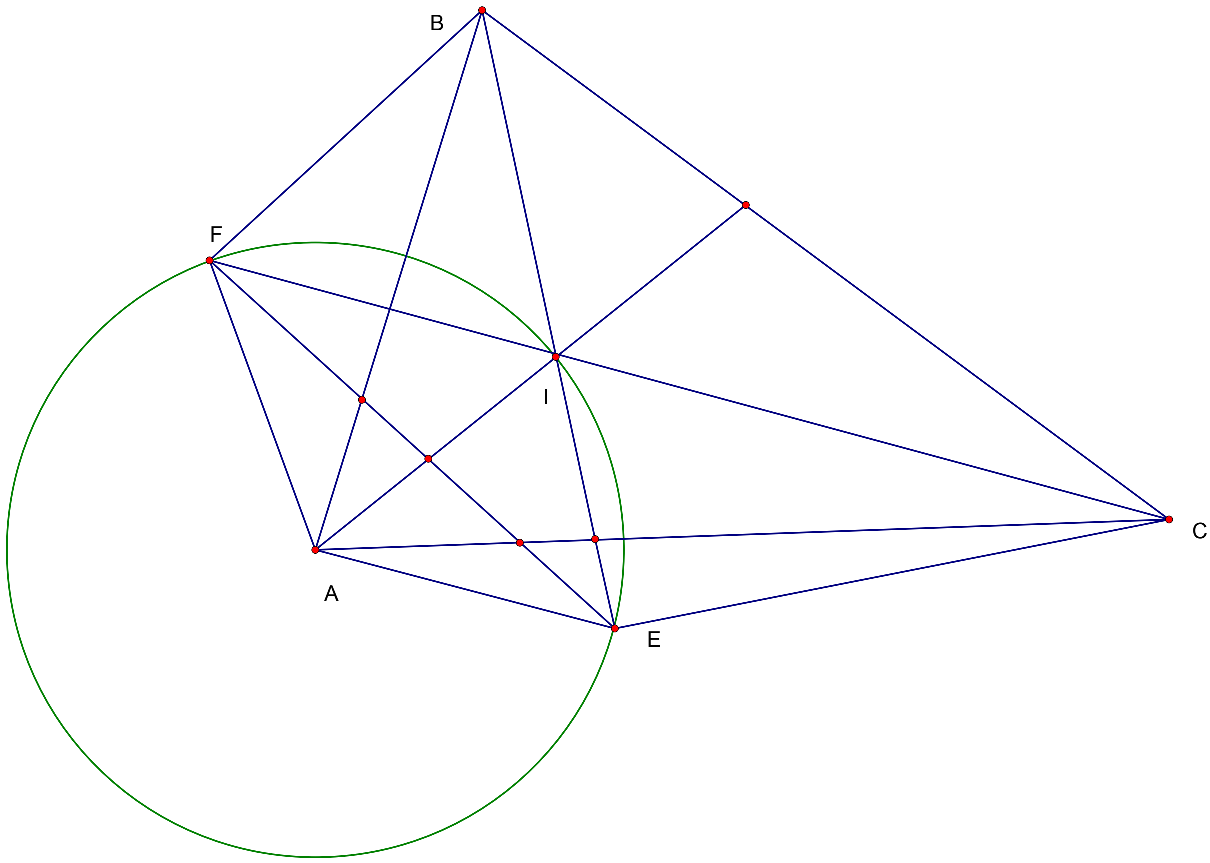
Եթե n–ը լրիվ քառակուսի է: Այդ դեպքում $p = 2m - 1$ և
$$n - 1 = d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{p-1} d_p = d_1 - (d_2 - d_3) - \cdots - (d_{2m-1} - d_{2m}) \le n - m + 1,$$ որտեղից $m \le 2$: +2 միավոր

Եթե $m = 1$, ապա $p = 1$, որտեղից $n = 1$, որը չի բավարարում:

Եթե $m = 2$, ապա $p = 3$, որտեղից $n = q^2$, որտեղ q–ն պարզ թիվ է:

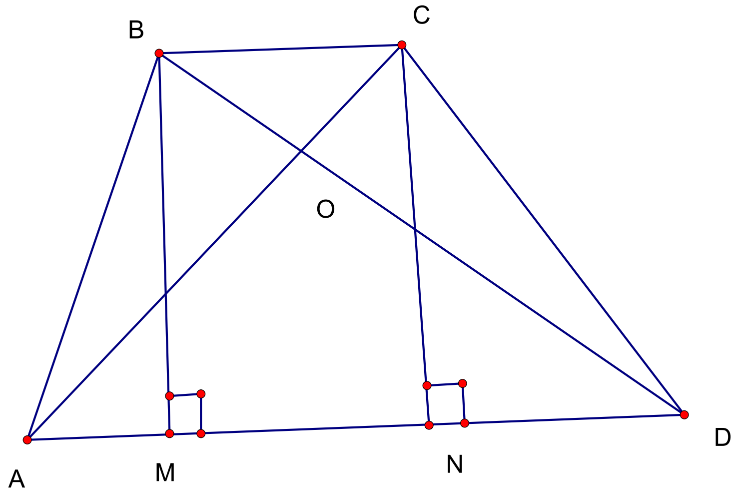
Այդ դեպքում $n = q^2 \Rightarrow d_1 - d_2 + d_3 = q^2 - q + 1 = q^2 - 1 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow n = 4$: +2 միավոր

5) **Ա-4, Բ-4** I –ն ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: A կենտրոնով և IA շառավիղով շրջանագիծը CI և BI ուղիղները համապատասխանաբար հատում են I –ից տարբեր F և E կետերում: Ապացուցեք, որ $S_{BFI} = S_{CEI}$:



Լուծում 1 : Դիցուք $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$: Այդ դեպքում $\angle AEI = \angle AIE = \alpha + \beta \Rightarrow \angle IAE = 180^{\circ} - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$,իսկ $2\gamma = \angle IAE = 2\angle EFI$ (միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ և կենտրոնական անկյուններ), որտեղից $\angle EFC = \gamma$: Ստացվեց, որ $\angle EFC = \angle BCF = \gamma$, որտեղից $EF \parallel BC$:

Լեմմա: ABCD քառանկյան անկյունագծերը հատվում են O կետում, իսկ BC և AD կողմերը զուգահեռ են: Ապացուցեք, որ $S_{ABO} = S_{CDO}$:



Ապացույց:

Քանի, որ $EF \parallel BC$, հետևաբար $S_{ABO} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{CDO}$:

Ըստ լեմմայի՝ $S_{ABO} = S_{CDO}$:

$\angle AEI = \angle AIE = \alpha + \beta$ + 1 միավոր

$\angle IAE = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$ + 1 միավոր

$\angle EFC = \gamma$ +1 միավոր

$EF \parallel BC$ +1 միավոր

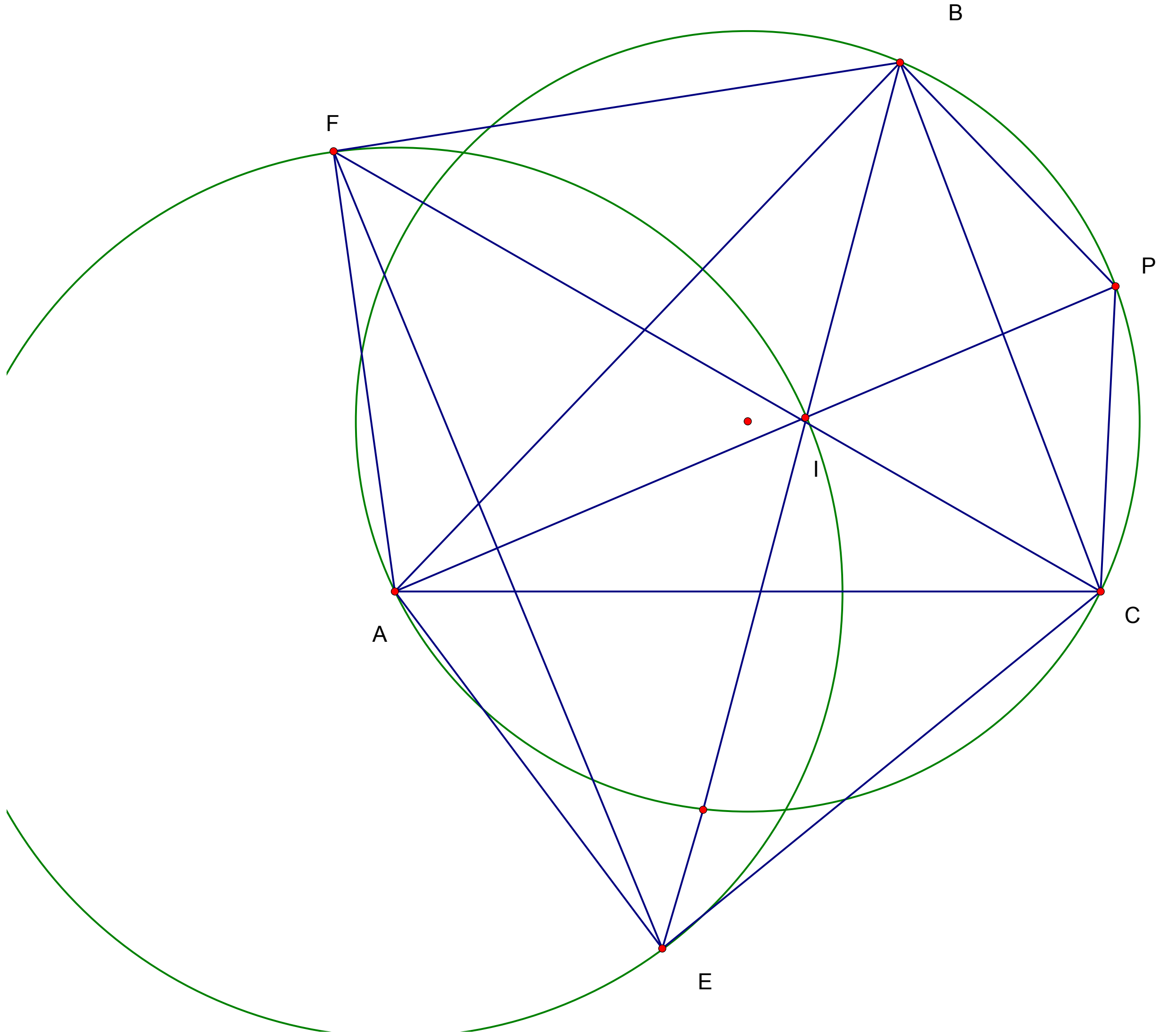
$S_{ABO} = S_{CDO}$ +3 միավոր:

Լուծում 2: Դիցուք AI ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում: (P-ն BPC աղեղի միջնակետն է)

$$\angle CBP = \angle PAC = \alpha \Rightarrow \angle IPB = \alpha + \beta = \angle BIP \Rightarrow \triangle AIE \sim \triangle BIP \Rightarrow \frac{IE}{BI} = \frac{AI}{IP}:$$

Նմանապես $\triangle IPC \sim \triangle AEI \Rightarrow \frac{IE}{BI} = \frac{FI}{IC}$, որտեղից $\frac{IE}{BI} = \frac{FI}{IC} \Rightarrow IE \cdot IC = FI \cdot BI$:

$$S_{BFI} = \frac{1}{2} FI \cdot BI \cdot \sin \angle FIB = \frac{1}{2} IE \cdot IC \cdot \sin \angle EIC = S_{CEI}:$$



AI ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում:

+ 1 միավոր

$\angle IPB = \alpha + \beta = \angle BIP$ + 1 միավոր

$AIE \quad BIP \Rightarrow \frac{IE}{BI} = \frac{AI}{IP}$ + 2 միավոր

$IPC \quad AEI \Rightarrow \frac{IE}{BI} = \frac{FI}{IC}$ + 1 միավոր

$S_{BFI} = S_{CEI}$ + 2 միավոր