

Տնողությունը – 180րոպե

1. Դիցուք a, b, c բնական թվերն այնպիսին են, որ $a^2 + b^2 = c^2$: Ապացուցել, որ $\frac{1}{2}(c - a)(c - b)$ արտահայտության արժեքը բնական թվի քառակուսի է:

Լուծում:

$$2(c - a)(c - b) = 2c^2 - 2ac - 2bc + 2ab = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab = (a + b - c)^2$$

Քանի որ հավասարության ձախ մասում գրված է զույգ թիվ, ուստի աջ մասում գրված թիվը նույնպես զույգ է, հետևաբար $a + b - c$ թիվը զույգ է: Ուստի

$$\frac{1}{2}(c - a)(c - b) = \left(\frac{a + b - c}{2}\right)^2$$

լրիվ քառակուսի է:

2. Գտնել բոլոր a և b բնական թվերը, որոնց համար $\frac{a^{2020} + b}{ab}$ արտահայտության արժեքը բնական թիվ է:

Լուծում: Քանի որ հավասարության հայտարարը բաժանվում է a -ի, ուստի համարիչը նույնպես պետք է բաժանվի a -ի: Այստեղից հետևում է, որ b -ն բաժանվում է a -ի: Նշանակենք $b = a \cdot b_1$: Տեղադրելով հավասարության մեջ կստանանք, որ

$$\frac{a^{2020} + b}{ab} = \frac{a^{2020} + ab_1}{a \cdot ab_1} = \frac{a^{2019} + b_1}{ab_1} \in N:$$

Կատարելով նույն դատողությունը ևս մեկ անգամ կստանանք, որ $b_1 = a \cdot b_2$: Տեղադրելով վերևի արտահայտության մեջ կստանանք, որ

$$\frac{a^{2020} + b}{ab} = \frac{a^{2020} + ab_1}{a \cdot ab_1} = \frac{a^{2019} + b_1}{ab_1} = \frac{a^{2018} + b_2}{ab_2} \in N:$$

Այսպես շարունակելով ի վերջո կստանանք

$$\frac{a^{2020} + b}{ab} = \frac{a^{2020} + ab_1}{a \cdot ab_1} = \dots = \frac{a + b_{2019}}{ab_{2019}} = \frac{1 + b_{2020}}{ab_{2020}} \in N:$$

Քանի որ հայտարարը բաժանվում է b_{2020} -ի, ուստի համարիչը նույնպես պետք է բաժանվի, հետևաբար $b_{2020} = 1$: Այստեղից էլ կստացվի, որ $a = 1$ կամ $a = 2$: Նաև նկատենք, որ $b = a^{2020} \cdot b_{2020} = a^{2020}$: Փաստորեն $(a, b) = (1, 1)$ և $(a, b) = (2, 2^{2020})$: Ստուգումը ցույց է տալիս, որ երկու պատասխաններն էլ բավարարում են:

Պատասխան՝ Փաստորեն $(a, b) = (1, 1)$, $(a, b) = (2, 2^{2020})$

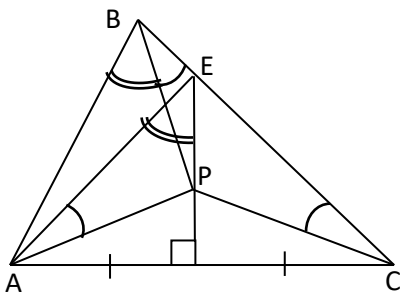
Տևողությունը – 180րոպե

3. Ոչ հավասարասրուն ABC սուրանկյուն եռանկյան ներսում, AC կողմի միջնուղղահայացի վրա վերցրել են P կետ այնպես, որ $\angle PAC + \angle PCB + \angle PBA = 90^\circ$: AC կողմի միջնուղղահայացի նպատկանող կամայական K կետից տարել են AB ուղղին զուգահեռ ուղիղ, որը BC ուղիղը հատում է F կետում: Ապացուցել, որ F, P, K, C կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Լուծում1: Նախ ապացուցենք, որ P -ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք AC կողմի միջնուղղահայացը BC ուղիղը հատում է E կետում:

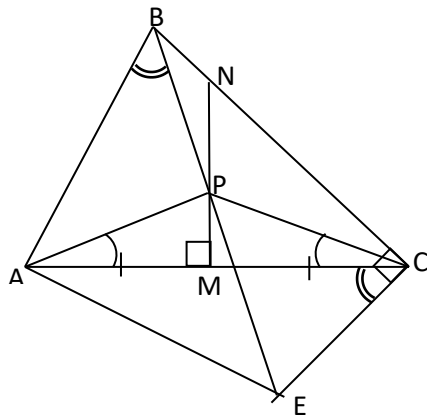
Այդ դեպքում $\angle EAC = \angle ECA$ և $\angle PAC = \angle PCA$, հետևաբար $\angle EAP = \angle ECP$: Քանի, որ $\angle PAC + \angle PCB + \angle PBA = \angle EAP + \angle PAC + \angle AEP = 90^\circ \Rightarrow \angle AEP = \angle ABP$, հետևաբար A, B, E, P կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle EAP = \angle EBP = \angle BCP$, որտեղից հետևում է, որ P -ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է:

Դիցուք K կետից AB -ին տարված զուգահեռը AC ուղիղը հատում է T կետում: Քանի, որ $\angle BCP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPC) = 90^\circ - \frac{\angle BPC}{2} = 90^\circ - \angle BAC$ և $\angle PKF = 90^\circ - \angle ATK = 90^\circ - \angle BAC$, որտեղից, $\angle BCP = \angle PKF$ հետևաբար F, P, K, C կետերով անցնում է շրջանագիծ:



Լուծում2: Դիցուք C կետում BC հատվածին տարված ուղղահայացը BP ուղղի հետ հատվում է E կետում:

Այդ դեպքում $\angle ABP = \angle ACE$, որտեղից հետևում է, որ $ABCE$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Քանի, որ $\angle BCE = 90^\circ$, ապա BE -ն տրամագիծ է: $P \in BE, P \in MN$, որտեղից P -ն ABC եռանկյան տրամագիծն է: Մնացածը առաջին լուծման նման:



4. Արամն ու Բաբկենը խաղում են հետևյալ խաղը: Սեղանին դրված են 8 քարտեր, որոնցից մեկի վրա գրված է 1 թիվը, երկրորդի վրա գրված է 2 թիվը և այդպես շարունակ՝ ընդհանուր առմամբ գրված են 1-ից 8 բոլոր բնական թվերը: Արամը վերցնում է այդ քարտերից որևէ մեկը, այնուհետև մեկ քարտ ընտրում է Բաբկենը, այնուհետև կրկին ընտրում է Արամը և այդպես շարունակ, մինչև քարտերն ավարտվեն ու երկուսն էլ ունենան չորսական քարտեր: Այնուհետև երկուսն էլ հաշվում են իրենց մոտ եղած քարտերի վրա գրված թվերի գումարը: Եթե երկուսի մոտ էլ պարզ թվեր են կամ երկուսի մոտ էլ բաղադրյալ թվեր են, ապա խաղն ավարտվում է ոչ-ոքի: Հակառակ դեպքում հաղթում է այն խաղացողը ում մոտ ստացվել է պարզ թիվ: Պարզել, թե արդյո՞ք խաղացողների մեկն ունի հաղթական մարտավարություն:

Տնողությունը – 180րոպե

Լուծում: Նկատենք, որ Արամի և Բաբկենի մոտ ստացված թվերի գումարը հավասար է $1 + 2 + \dots + 7 + 8 = 36$, ընդ որում յուրաքանչյուրի մոտ ստացված թիվը առնվազն 10 է, իսկ առավելագույնը 26: Հաղթելու համար յուրաքանչյուր խաղացող պետք է փորձի ստանալ այդ միջակայքի որևէ պարզ թիվ, որոնք են 11,13,17,19,23: Քանի որ $13+23=36$ և $17+19=36$, ուստի 13,17,19,23 թվերը հաղթանակ չեն ապահովի, քանի որ մյուս խաղացողի մոտ նույնպես կստացվի պարզ թիվ և խաղը կավարտվի ոչ-ոքի: Հետևաբար հաղթելու միակ տարբերակը 11 ստանալն է: Բայց 11 ստանալու միակ տարբերակը 1,2,3,5 թվերն ընտրելն է: Ակնհայտ է, որ խաղացողներից յուրաքանչյուրը կարող է մյուսին խանգարել ընտրել այդ չորս քարտերը, քանի որ հենց առաջին քարտին կարող է ընտրել դրանցից ցանկացածը և հակառակորդին զրկել հաղթելու հնարավորությունից: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ ոչ մեկն էլ չունի հաղթական մարտավարություն: