ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

9-րդ դասարան

Երկրորդ օր (18 փետրվարի, 2024թ)

4. Խորանարդի յուրաքանչյուր գագաթում գրված է մեկական բնական թիվ: Սարոն խորա–նարդի ամեն կողի վրա գրեց այդ կողի ծայրակետերի թվերի գումարը: Պարզվեց, որ ճիշտ N կողի վրա գրված է 3-ի բազմապատիկ: Կարո՞ղ ենք արդյոք պնդել, որ կա խորանարդի նիստ, որի գագաթներում գրված թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի: Դիտարկե՛ք երկու դեպք՝ ա) $N = 6$, բ) $N = 7$:

   Լուծում: ա) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի A և C_1 գագաթներին գրենք 2, իսկ մնացած գագաթներին՝ 1: Այդ դեպքում $AB, AD, AA_1, C_1B_1, C_1D_1, C_1C$ կողերի վրա կգրվի 3, իսկ մնացած կողերին՝ 2: Փաստորեն կողերի քանակը, որոնց վրա գրված թիվը բաժանվում է 3-ի 6 է: Խորանարդի ցանկացած նիստի գագաթներին գրված է 1, 1, 1, 2, որոնց գումարը 5 է և չի բաժանվում 3-ի:

   բ) Խորանարդի կողերը բաժանենք զույգերի՝

   $$(AB, CD), (BC, AD), (A_1B_1, C_1D_1), (B_1C_1, A_1D_1), (AA_1, BB_1), (CC_1, DD_1) :$$

   Նկատենք, որ ցանկացած զույգի չորս գագաթներով կազմվում է խորանարդի նիստ:

   Ստացվեց 6 խումբ: Քանի որ 7 կողերի վրա գրված թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի, ուրեմն կգտնվի կողերի զույգ, որոնցից երկուսի վրա գրված թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի: Այդ կողերը միասին կազմում եմ նիստ:

5. Դիցուք տրված է $\angle BCA = 30^o$ անկյունով և AC ներքնաձիգով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը: Դիցուք եռանկյան AD կիսորդն ու AC-ին պարված BE ուղղահայացը հատվում են M կետում, իսկ P-ն MC հատվածի միջնակետն է: Ապացուցե՛ք, որ $AC = 4DP$:

Լուծում: Դիցուք A' կետը A կետի համաչափն է B կետի նկատմամբ: $\triangle A'CA$-ում CB հատվածը բարձրություն է և միջնագիծ, այսինքն $AC = CA'$:

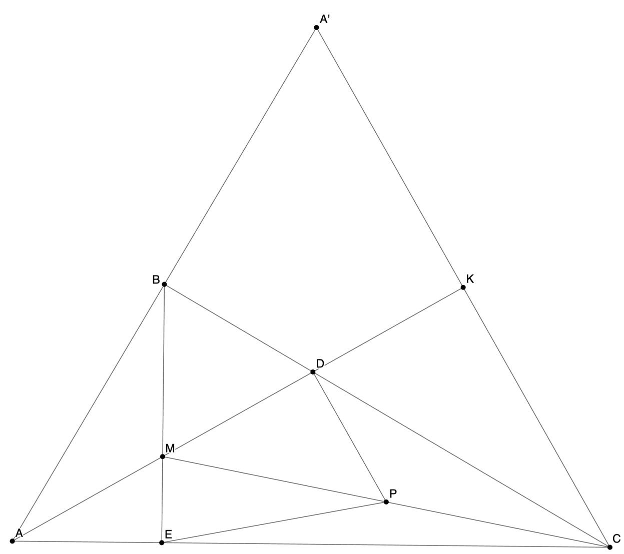
$$AA' = 2AB = AC \text{ և } AC = CA',$$

որտեղից սպանում ենք, որ $\triangle A'CA$ հավասարակողմ է: AK կիսորդ է հավասարակողմ եռանկյան մեջ, այսինքն $A'K = KC$ և $\angle BAD = \angle DAC = \angle DCA = 30°$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle BDM = 60° = \angle MBD$, որտեղից էլ $BD = DM$:

$$A'K = KC, AB = BK \Rightarrow BK||AC \Rightarrow BK \perp BE \Rightarrow MD = MK$$

Վերջին քայլին օգտագործեցինք $BD = DM$ հավասարությունը: Վերջապես,

$$MD = DK, MP = PC \Rightarrow DP = \frac{KC}{2} = \frac{A'C}{4} = \frac{AC}{4} :$$



6. Գտե՛ք բոլոր (p,q) պարզ թվերի թվազույգերը, որոնք բավարարում են

$$p^{2q+1} = q^p + 2023$$

հավասարությանը:

Լուծում: Քանի որ p^{2q+1} և q^p թվերի տարբերությունը կենտ է, ուրեմն նրանցից մեկը զույգ է, իսկ մյուսը՝ կենտ: Հետևաբար կամ $p=2$, կամ $q=2$:

Դեպք 1. $p=2$: Այս դեպքում $2^{2q+1} = q^2 + 2023$: Համաձայն Ֆերմայի փոքր թեորեմի $2^q \equiv 2(mod\ q$, հետևաբար

$$2^{2q+1} = (2^q)^2 \cdot 2 = 8(mod\ q) :$$

Ուրեմն

$$8 \equiv 2023(mod\ q) :$$

Ստացանք, որ q-ն $2023-8=2015$-ի բաժանարար է: Քանի որ q-ն պարզ թիվ է, ուրեմն $q=5,13$ կամ 31: Ստուգելով տեսնում ենք, որ լուծում է միայն $q=5$ դեպքը:

Դեպք 2. $q=2$: Այս դեպքում

$$p^5 = 2^p + 2023 :$$

Համաձայն Ֆերմայի փոքր թեորեմի

$$0 \equiv p^5 \equiv 2 + 2023 = 2025(mod\ p) :$$

Ստացանք, որ p-ն 2025-ի բաժանարար է: Քանի որ p-ն պարզ թիվ է, ուրեմն $p=3$ կամ 5: Ստուգելով տեսնում ենք, որ նրանցից ոչ մեկը չի բավարարում խնդրի պայմաններին:

Պատասխան՝ $(p,q) = (2,5)$: