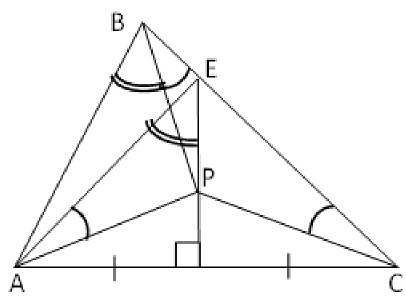
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

8-րդ դասարան, օր 2

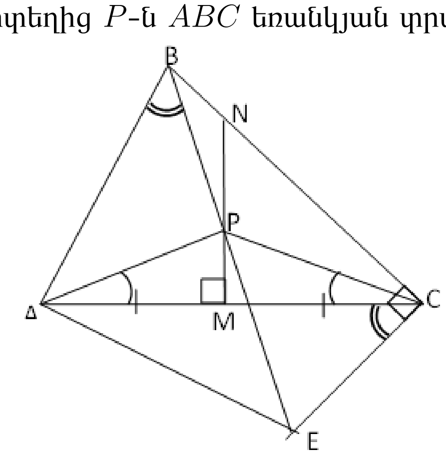
ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Խնդիր 1. Ոչ հավասարասրուն ABC սուրանկյուն եռանկյաններում, AC կողմի միջնուղղահայացի վրա, վերցրել են P կետն այնպես, որ $\angle PAC + \angle PCB + \angle PBA = 90^o$: Դիցուք AC կողմի միջնուղղահայացին պատկանող կամայական K կետից տարել են AB ուղղին զուգահեռ ուղիղ, որը BC ուղիղը հատում է F կետում: Ապացուցել, որ F, P, K, C կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Լուծում 1. 1) Նախ ապացուցենք, որ P–ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք AC կողմի միջնուղղահայացը BC ուղղիղը հատում է E կետում: Այդ դեպքում $\angle EAC = \angle ECA$ և $\angle PAC = \angle PCA$, հետևաբար $\angle EAP = \angle ECP$: Քանի, որ $\angle PAC + \angle PCB + \angle PBA = \angle EAP + \angle PAC + \angle AEP = 90^o$, հետևաբար $\angle AEP = \angle ABP$, հետևաբար A, B, E, P կետերով անցնում է շրջանագիծ, հետևաբար $\angle EAP = \angle EBP = \angle BCP$, որտեղից հետևում է, որ P-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք K կետից AB–ին տարված զուգահեռը AC ուղիղը հատում է T կետում: Քանի, որ $\angle BCP = \frac{1}{2}(180^o - \angle BPC) = 90^o - (\angle BPC)/2 = 90^o - \angle BAC$ և $\angle PKF = 90^o - \angle ATK = 90^o - \angle BAC$, որտեղից, $\angle BCP = \angle PKF$, հետևաբար F, P, K, C կետերով անցնում է շրջանագիծ:



2) Դիցուք C կետում BC հատվածին տարված ուղղահայացը BP ուղղի հետ հատվում է E կետում: Այդ դեպքում $\angle ABP = \angle ACE$, որտեղից հետևում է, որ $ABCE$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Քանի, որ $\angle BCE = 90^o$, ապա BE-ն տրամագիծ : $P \in BE$, $P \in MN$, որտեղից P-ն ABC եռանկյան տրամագիծն է: Մնացածը առաջին լուծման նման:



Խնդիր 2. Հովհաննեսը 7×7 աղյուսակի վանդակներից յուրաքանչյուրում լրացրեց 1 և 2 թվերից որևէ մեկը: Ամեն տողի դիմաց գրեց այդ տողում գրված բոլոր թվերի գումարը, իսկ ամեն սյունակի

վերևում գրեց այդ սյունակում գրված բոլոր թվերի արտադրյալը: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ ստացված բոլոր թվերը լինեն իրարից տարբեր:

Լուծում 2. ՊՆԴՈՒՄ 1. Տողերի գումարներում չեն կարող միաժամանակ հանդիպել 7 և 14 թվերը:

Իսկապես, դիցուք որևէ տողում գրված թվերի գումարը 7 է: Դա նշանակում է, որ այդ տողում գրված են միայն 1–եր: Նույն դատողությամբ 14 գումար ունեցող տողերում գրված են միայն 2–եր: Այսինքն յուրաքանչյուր սյունակ պարունակում է գոնե մեկ հատ 2 և մեկ հատ 1: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ ամեն սյունակում 2-երի քանակը կարող է լինել 1, 2, . . ., 6 հատ: Քանի որ կա ընդհանուր 7 հատ սյունակ, ուստի, համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի որևէ երկու սյունակներում կլինեն հավասար քանակությամբ 2–եր և դրանցում գրված թվերի արտադրյալը կլինի հավասար:

ՊՆԴՈՒՄ 2. Սյունակների արտադրյալներում չեն կարող միաժամանակ հանդիպել 1 և 2^7 թվերը:

Ապացույցը լրիվ նույն ձև է:

Տողերով գումարի հնարավոր տարբերակներն են 7, 8, . . ., 14, իսկ սյունակներով արտադրյալինը. 1, 2, 4 ,. . . , 2^7: Նկատենք, որ 8 թիվը կրկնվում է և կա ընդհանուր 15 հատ տարբեր թիվ: Դրանցից 7 և 14 թվերից գոնե մեկը չկա, ինչպես նաև 1 և 2^7 թվերից որևէ մեկը չկա: Այսինքն կարող է լինել ոչ ավել քան 13 իրարից տարբեր թիվ: Ստացանք, որ հնարավոր չէ:

Խնդիր 3. Դիցուք a և b թվերը N կենտ բնական թվի բաժանարարներ են, ընդ որում $a > b$: Ապացուցել, որ

$$\frac{a}{b} > 1 + \frac{2b+3}{N} :$$

Լուծում 3. Նշանակենք $(a, b) = d$: Այդ դեպքում $a = md$ և $b = nd$, որտեղ $(m, n) = 1$: Նաև կարող ենք գրել $N = mndz$: Տրված անհավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը.

$$\frac{m}{n} > 1 + \frac{2nd+3}{mndz} :$$

Քանի որ

$$\frac{2nd+3}{mndz} \leq \frac{2nd+3}{mnd} = \frac{2}{m} + \frac{3}{mnd} \leq \frac{2}{m} + \frac{3}{mn} = \frac{2n+3}{mn}$$

ուստի բավարար է ապացուցել

$$\frac{m}{n} > 1 + \frac{2n+3}{mn}$$

անհավասարությունը: Բազմապատկելով mn–ով կստանանք, որ

$$m^2 > mn + 2n + 3$$

որն էլ ճիշտ է, քանի որ m և n կենտ թվեր են, ընդ որում

$$m^2 - mn = m(m-n) \geq 2m \geq 2(n+2) > 2n+3$$