ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

8-րդ դասարան

Երկրորդ օր (18 փետրվարի, 2024թ)

4. Գոյություն ունե՞ն արդյոք a, b, c դրական թվեր, որ $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{2bc}$, $\sqrt{2ac}$ թվերից յուրաքանչյուրը մեծ է $\frac{a+b+c}{2}$-ից:

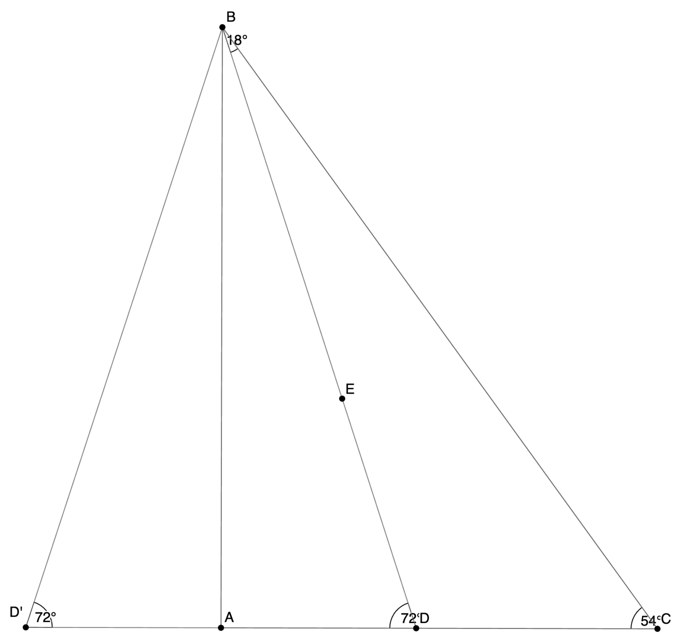
   Լուծում: Ապացուցենք, որ այդպիսի թվեր գոյություն չունեն: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $a \geq b \geq c$: Այդ դեպքում $\sqrt{2ab} \geq \sqrt{2ac} \geq \sqrt{2bc}$: Բավարար է ապացուցել, որ
$$\frac{a+b+c}{2} > \sqrt{2bc}:$$
   Քանի որ $\frac{a+b+c}{2} \geq \frac{2b+c}{2}$, ուստի բավարար է ապացուցել, որ
$$\frac{2b+c}{2} > \sqrt{2bc}:$$
   Ապուցելու համար երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի (երկու կողմն էլ դրական են)՝
$$b^2 + bc + \frac{c^2}{4} > 2bc:$$
   Ստացված անհավասարությունը համարժեք է
$$b^2 - bc + \frac{c^2}{4} > 0,$$
   որը համարժեք է
$$\left(b - \frac{c}{2}\right)^2 > 0$$
   անհավասարությանը: Վերջինս ճիշտ է, քանի որ $b \geq c > \frac{c}{2}$:

5. Դիցուք ABC եռանկյան անկյունները բավարարում են $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 54^\circ$ պայմաններին: Եռանկյան BD կիսորդի վրա նշել են E կետն այնպես, որ $DE = DC$: Ապացուցե՛ք, որ $BE = 2AD$:

Լուծում: Դիցուք D' կետը D կետի համաչափն է A կետի նկատմամբ: $\angle ABC = 90^\circ - \angle BCA = 36^\circ$ այսինքն $\angle DBA = 18^\circ$, որտեղից $\angle BDA = 72^\circ$: $\triangle DBD'$-ում BA բարձրություն է և միջնագիծ, այսինքն $\angle BD'D = \angle BDA = 72^\circ$, և $BD = BD'$: Նաև

$$\angle D'BC = 180^\circ - \angle BCD' - \angle BD'C = 180^\circ - 54^\circ - 72^\circ = 54^\circ,$$

որտեղից $BD' = D'C$: Վերջապես $BE = BD - ED = BD' - CD = D'C - DC = DD' = 2AD$:



6. Խորանարդի յուրաքանչյուր գագաթում գրված է մեկական բնական թիվ: Սարոն խորանարդի ամեն կողի վրա գրեց այդ կողի ծայրակետերի թվերի գումարը: Պարզվեց, որ ճիշտ N կողի վրա գրված է 3-ի բազմապատիկ: Կարո՞ղ ենք արդյոք պնդել, որ կա խորանարդի նիստ, որի գագաթներում գրված թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի: Դիտարկե՛ք երկու դեպք՝ ա) $N = 6$, բ) $N = 7$:

   Լուծում: ա) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի A և C_1 գագաթներին գրենք 2, իսկ մնացած գագաթներին՝ 1: Այդ դեպքում $AB, AD, AA_1, C_1B_1, C_1D_1, C_1C$ կողերի վրա կգրվի 3, իսկ մնացած կողերին՝ 2: Փաստորեն կողերի քանակը, որոնց վրա գրված թիվը բաժանվում է 3-ի 6 է: Խորանարդի ցանկացած նիստի գագաթներին գրված է 1, 1, 1, 2, որոնց գումարը 5 է և չի բաժանվում 3-ի:

   բ) Խորանարդի կողերը բաժանենք զույգերի՝

$$(AB, CD), (BC, AD), (A_1B_1, C_1D_1), (B_1C_1, A_1D_1), (AA_1, BB_1), (CC_1, DD_1):$$

   Նկատենք, որ ցանկացած զույգի չորս գագաթներով կազմվում է խորանարդի նիստ:

   Ստացվեց 6 խումբ: Քանի որ 7 կողերի վրա գրված թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի, ուրեմն կգտնվի կողերի զույգ, որոնցից երկուսի վրա գրված թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի: Այդ կողերը միասին կազմում եմ նիստ: