ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

8-րդ դասարան, օր 2

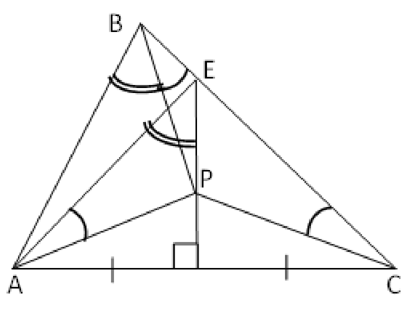
ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Խնդիր 1. Արսենը 4×4 աղյուսակի վանդակներից յուրաքանչյուրում լրացրեց 1 և 2 թվերից որևէ մեկը: Ամեն տողի համար Արսենը հաշվեց այդ տողում գրված բոլոր թվերի գումարը, իսկ ամեն սյունակի համար՝ այդ սյունակում գրված բոլոր թվերի արտադրյալը: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ ստացված բոլոր թվերը լինեն իրարից տարբեր:

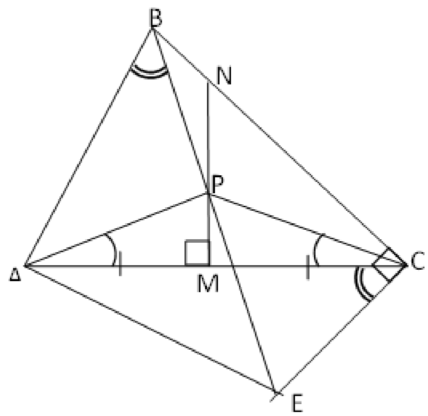
Լուծում 1. Գումարի հնարավոր տարբերակներն են 4, 5, 6, 7, 8, իսկ սյունակներով արտադրյալինը. 1, 2, 4 ,8 , 16 : Քանի որ կա ընդհանուր 8 տարբերակ, ուստի այդ բոլոր թվերն էլ պետք է հանդիպենք: Քանի որ որևէ սյունակով արտադրյալը 16 է, ուստի որևէ սյունակում բոլոր թվերը 2 են: Նույն կերպ որևէ սյունակում բոլոր թվերը 1 են: Ստացվեց, որ ցանկացած տողի այդ երկու սյունակում գրված թվերի գումարը 3 է: Մնացած երկու սյունակով հնարավոր է ստանալ միայն 2, 3, 4 արժեքները, այսինքն ոնց էլ դասավորենք որևէ երկու տողում գրված թվերի գումարը կլինի նույնը: Պատասխան. հնարավոր չէ:

Խնդիր 2. Ոչ հավասարասրուն ABC սուրանկյուն եռանկյան ներսում, AC կողմի միջնուղղահայա–ցի վրա, վերցրել են P կետ այնպես, որ $\angle PAC+\angle PCB+\angle PBA = 90^o$, իսկ I-ն ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Հայտնի է, որ A, I, P, C կետերով անցնում է շրջանագիծ: Գտնել ABC անկյան աստիճանային չափը:

Լուծում 2. 1) Նախ ապացուցենք, որ P–ն ABC եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք AC կողմի միջնուղղահայացը BC ուղիղը հատում է E կետում: Այդ դեպքում $\angle EAC = \angle ECA$ և $\angle PAC = \angle PCA$, հետևաբար $\angle EAP = \angle ECP$: Քանի, որ $\angle PAC+\angle PCB+\angle PBA = \angle EAP + \angle PAC + \angle AEP = 90^o$, ուստի $\angle AEP = \angle ABP$, հետևաբար A, B, E, P կետերով անցնում է շրջանագիծ: Այստեղից $\angle EAP = \angle EBP = \angle BCP$, որտեղից հետևում է, որ P-ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք $\angle ABC = \beta$, հետևաբար $\angle APC = 2\beta$ և $\angle AIC = 90^o + \beta/2$: Քանի, որ A, I, P, C կետերով անցնում է շրջանագիծ հետևաբար $2\beta = 90^o + \beta/2$, որտեղից $\beta = 60^o$:



2) Դիցուք C կետում BC հատվածին տարված ուղղահայացը BP ուղղի հետ հատվում է E կետում: Այդ դեպքում $\angle ABP = \angle ACE$, որտեղից հետևում է, որ $ABCE$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Քանի, որ $\angle BCE = 90^o$, ապա BE–ն տրամագիծ է: $P \in BE$, $P \in MN$, որտեղից P-ն ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի տրամագիծն է: Մնացածը առաջին լուծման նման:



Խնդիր 3. Դիցուք տրված են 15 հատ զույգ առ զույգ իրարից տարբեր եռանիշ թվեր: Գտնել այդ եռանիշ թվերի կցագրումով ստացվող վեցանիշ թվերից 13-ի բաժանվող թվերի նվազագույն հնարավոր քանակը:

Լուծում 3. Նկատենք, որ

$$\overline{xy} = 1000x + y = 1001x + (y - x) :$$

Քանի որ 1001–ն առանց մնացորդի բաժանվում է 13–ի, ուստի $\overline{xy}$ թիվը 13–ի կբաժանվի, եթե $x - y$ բաժանվում է 13–ի: Եթե այդ 15 թվերը 13-ի բաժանելիս որևէ a մնացորդ չի ստացվում, ապա այլ մնացորդ տվող թիվ փոխարինելով a մնացորդ տվող թվով փոխարինելու դեպքում նոր թիվ հնարավոր չի լինի ստանալ: Հետևաբար կարող ենք համարել, որ ամեն մնացորդ տվող գոնե մեկ թիվ կա: Մնացած 2 թվերի համար դիտարկենք երկու տարբերակ.

ԴԵՊՔ 1. Երկու թվերն էլ 13-ի բաժանելիս տալիս են նույն մնացորդը: Ուրեմն այդ մնացորդ տվող 3 թիվ կլինի ու իրենց կցագրումներով հնարավոր կլինի ստանալ խնդրի պայմանին բավա– րարող 6 հատ վեցանիշ թիվ:

ԴԵՊՔ 2. Երկու թվերը 13-ի բաժանելիս տալիս են տարբեր մնացորդներ: Այս դեպքում հնարավոր կլինի կառուցել $2 \cdot 2 = 4$ հատ թիվ: