ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ

Երկրորդ օր (18 փետրվարի, 2024թ)

4. Տրված են իրական գործակիցներով $x^4+a_1x^3+b_1x^2-2x+1$, $x^4+a_2x^3+b_2x^2-2x+1$, $x^4+a_3x^3+b_3x^2-2x+1$ բազմանդամները: Հայտնի է, որ $a_1b_2>a_2b_1$, $a_2b_3>a_3b_2$ և $a_3b_1>a_1b_3$: Ապացուցե՛ք, որ տրված բազմանդամներից գոնե մեկն ունի իրական արմատ:

Լուծում: Նշանակենք $P_i(x)=x^4+a_ix^3+b_ix^2-2x+1$, $i=1,2,3$: Նաև պայմանավորվենք, որ $a_4=a_1$, $b_4=b_1$, $P_4(x)=P_1(x)$: Ապացուցենք, որ $P_1(1)$, $P_2(1)$, $P_3(1)$ թվերից գոնե մեկը դրական չէ: Եթե բոլորն էլ լինեն դրական, ուրեմն $P_i(1)=a_i+b_i>0$: Քանի որ $a_ib_{i+1}>a_{i+1}b_i$, ուրեմն

$$a_i\Big(P_{i+1}(1)-a_{i+1}\Big)>a_{i+1}\Big(P_i(1)-a_i\Big),$$

ուրեմն

$$a_iP_{i+1}(1)>a_{i+1}P_i(1):$$

Քանի որ $P_i(1)>0$ և $P_{i+1}(1)>0$, ուրեմն

$$\frac{a_i}{P_i(1)}>\frac{a_{i+1}}{P_{i+1}(1)}:$$

Այս անհավասարումը կիրառելով $i=1,2,3$ դեպքերի համար կստանանք, որ

$$\frac{a_1}{P_1(1)}>\frac{a_2}{P_2(1)}>\frac{a_3}{P_3(1)}>\frac{a_1}{P_1(1)}:$$

Ստացանք հակասություն: Ուստի ինչ-որ i թվի համար $P_i(1)\le 0$: Քանի որ P_i բազմանդամը x-ի շատ մեծ արժեքների դեպքում լինելու է դրական, ուստի ինչ-որ կետում P_i բազմանդամն ընդունելու է 0 արժեքը:

5. Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյան AD, BE, CF բարձրությունները հատվում են H կետում: Դիցուք M–ը և S-ը համապատասխանաբար BC և AH հատվածների միջնակետերն են: Դիցուք FE և AH հատվածների հատվում են G կետում, իսկ AM հատվածն ու BCH եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատվում են N կետում: Ապացուցե՛ք, որ $\angle HMA = \angle GNS$:

   Լուծում:

   Դիցուք P-ն A կետի համաչափին է M կետի նկատմամբ: A-ն BHC եռանկյան օրթոկենտրոնն է, այսինքն P -ն ընկած է BHC եռանկյան արտագծած շրջանագծի վրա:

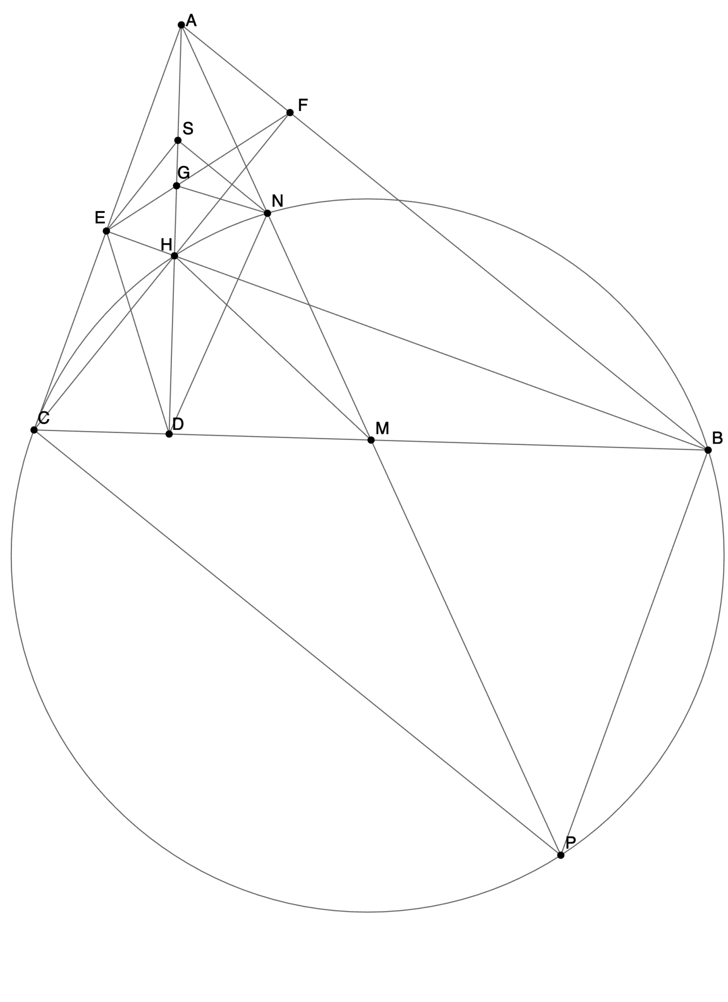
$$HC \perp PC \Rightarrow HN \perp NP,$$

   որտեղից սպանում ենք, որ N կետը ընկած է A, E, F, H և H, D, M կետերով անցնող շրջանագծերի վրա:

$$\angle EDH = \angle ACF = 90^\circ - \angle A = \angle SEF \Rightarrow SN^2 = SE^2 = SG \cdot SD:$$

   Սպանում ենք

$$\angle SNG = \angle GDN = \angle HDN = \angle HMN:$$



6. Ամբողջ թվերի $a_0, a_1, a_2, \ldots$ հաջորդականությունը կոչվում է «կամարե» հաջորդականություն, եթե $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ և ցանկացած n բնական թվի համար տեղի ունի

$$(a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1})(a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}) = 0$$

հավասարությունը: Ամբողջ թիվը կոչվում է «կամարե», եթե այն պատկանում է ինչ-որ «կամարե» հաջորդականության: Հայտնի է, որ m և $m+1$ հաջորդական բնական թվերը «կամարե» են (պարտադիր չէ, որ պատկանեն նույն «կամարե» հաջորդականությանը): Ապացուցե՛ք, որ m-ն առանց մնացորդի բաժանվում է 3-ի և $\frac{m}{3}$ թիվը «կամարե» է:

Լուծում: Ձևափոխելով խնդրի պայմանը կարող ենք ստանալ.

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \text{ կամ } a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$$

Գիտենք, որ $a_{n+1} \equiv a_n$ կամ a_{n-1} $(mod\ 2)$ և $a_{n+1} \equiv a_n$ կամ a_{n-1} $(mod\ 3)$ ցանկացած $n \geq 1$ թվի համար: Քանի որ $a_0 = 0$ և $a_1 = 1$, ապա $a_n \equiv 0$ կամ 1 $(mod\ 3)$: Քանի որ m-ը և $m+1$-ը «կամարե» թվեր են, ուրեմն $m \equiv 0$ $(mod\ 3)$:

Կարող ենք եզրակացնել նաև, որ $a_2 = 3$ կամ $a_2 = 4$: Բացի այդ,
(1) Եթե $a_2 = 3$, ապա $a_n \equiv 1$ $(mod\ 2)$ ցանկացած $n \geq 1$ թվի համար, քանի որ $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$ $(mod\ 2)$:
(2) Եթե $a_2 = 4$, ապա $a_n \equiv 1$ $(mod\ 3)$ ցանկացած $n \geq 1$ թվի համար, քանի որ $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$ $(mod\ 3)$:

Քանի որ $m \equiv 0$ $(mod\ 3)$, m-ը պարունակող ցանկացած «կամարե» հաջորդականություն, չի բավարարում (2)-ին, ուստի պետք է բավարարի (1)-ին: Այսպիսով m-ը կենտ է, իսկ $m+1$-ը՝ զույգ:
Վերցնենք $m+1$-ը պարունակող որևէ (a_n) «կամարե» հաջորդականություն: Դիցուք $t \geq 2$-ը այնպիսի թիվ է, որ $a_t = m+1$: Քանի որ (a_n)-ը չի բավարարում (1)-ին, ապա այն պետք է բավարարի (2)-ին: Ուստի $a_n \equiv 1$ $(mod\ 3)$ ցանկացած $n \geq 1$ թվի համար: Սահմանենք նոր հաջորդականություն՝ $a'_n = (a_{n+1} - 1)/3$: Սա «կամարե» հաջորդականություն է, $a'_0 = 0$, $a'_1 = 1$ և ցանկացած $n \geq 1$ թվի համար
$(a'_{n+1} - 3a'_n + 2a'_{n-1})(a'_{n+1} - 4a'_n + 3a'_{n-1}) = (a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n)(a_{n+2} - 4a_{n-1} + 3_n)/9 = 0$:
Վերջապես, նկատենք, որ $a'_{n+1} = m/3$, ինչը նշանակում է, որ $m/3$-ը «կամարե» է: