ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-12-րդ դասարաններ, օր 2

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Խնդիր 1. Դիցուք ABC եռանկյանն ներգծած շրջանագծի O կենտրոնով AO ուղղին տարված ուղղահայացը BC ուղիղը հատում է M կետում: Դիցուք O կետից AM ուղղին տարված է OD ուղղահայացը: Ապացուցել, որ A, B, C, D կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Լուծում 1. $\Delta MOD \sim \Delta AMO$, հետևաբար $MO^2 = MD \cdot DA$ (1):

$\angle AOB = 180^o - 1/2(\angle CBA + \angle BAC) = 90^o + 1/2\angle BCA = 90^o + \angle OCB$, հետևաբար $\angle MOB = \angle OCB$, հետևաբար $\Delta MOB \sim \Delta MOC$, որտեղից էլ $MO^2 = MC \cdot MB$: (2)

(1)-ից և (2)-ից հետևում է, որ $MC \cdot MB = MD \cdot MA$, որն էլ համարժեք է $MB/MA = MD/MC$ և $\angle AMC$-ն MDB և MAC եռանկյունների համար ընդհանուր է, ուստի $\Delta MDB \sim \Delta MAC$, որտեղից ստացվում է, որ $\angle MBD = \angle MAC$, ուստի $\angle CAD + \angle DBC = 180^o$, հետևաբար A, B, C, D կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Խնդիր 2. Յանկացած p և q բնական թվերի համար թվային առանցքի

$$\left[\frac{p}{q} - \frac{1}{4q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{4q^2}\right]$$

միջակայքը ներկել են: Ապացուցել, որ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ կոորդինատով կետը ներկած չէ:

Լուծում 2. Խնդիրը համարժեք է նրան, որ ապացուցենք, որ գոյություն չունեն $p < q$ բնական թվեր, որոնց համար տեղի ունի

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \leq \frac{1}{4q^2}$$

պայմանը: Այդ անհավասարությունը բազմապատկելով

$$\left|\frac{p}{q} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 2$$

ակնհայտ առնչության հետ կստանանք, որ

$$\left|\frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

որն էլ բազմապատկելով $2q^2$–ով կստանանք, որ

$$\left|2p^2 - q^2\right| < 1 :$$

Ստացվեց, որ $2p^2 = q^2$, ինչն անհնար է:

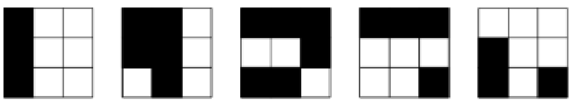
Խնդիր 3. Նկարիչը $n \times n$ չափի սպիտակ կտավի վրա փորձում է ստանալ հետաքրքիր պատկերներ հետևյալ կերպ. ամեն քայլի, սկսելով ներքևի ձախ անկյունից, անում է հետևյալը.

- եթե վանդակը սպիտակ է, ապա այն ներկում է սև ու անցնում վերևի վանդակին (կամ ավարտում, եթե կտավից դուրս է գալիս),

- եթե վանդակը սև է, ապա այն ներկում է սպիտակ ու անցնում աջ կողմի վանդակին (կամ ավարտում, եթե կտավից դուրս է գալիս):

Այս գործողությունը կրկնում է այնքան, մինչև կտավից դուրս գա: Մեկ քայլը ներքևի ձախ վանդակից սկսելուց մինչև կտավից դուրս գալու գործընթացն է: Ապացուցել, որ որոշակի քանակությամբ քայլերից հետո կտավը կրկին կդառնա սպիտակ: Գտնել քայլերի նվազագույն քանակը, որոնցից հետո կտավը կլինի սպիտակ:

Ծանոթություն: *Ստորև $n = 3$ դեպքի համար պատկերված են նկարչի նկարները՝ մի քանի հաջորդական քայլերից հետո:*



Լուծում 3. Պատասխանը 2-ի ամենամեծ աստիճանն է, որ հանդիսանում է $2(2n-2)!$–ի բաժանարար (այլ կերպ ասած $2^{1+v_2((2n-2)!)}$:

Կտավը կարող ենք շարունակել վերև ու աջ ու համարել անվերջ աղյուսակ, ընդ որում ներքևի ձախ վանդակը համարենք $(0,0)$ կետը: Դիտարկենք $F_s\colon (x,y) \to \mathbb{N}$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ.

- $F_s(x,y) = 0$ եթե $x < 0$ որ $y < 0$;
- $F_s(0,0) = s$;
- $x \geq 0$ և $y \geq 0$ թվերի համար $F_s(x,y) = \left\lfloor \dfrac{F_s(x,y-1)+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{F_s(x-1,y)}{2} \right\rfloor$:

$x+y$-ով ինդուկցիայի միջոցով ստացվում է, որ ճիշտ s քայլ անց (x,y) վանդակի գույնը հավասար է $F_s(x,y) \bmod 2$, որտեղ 1 նշանակում է սև, իսկ 0-ն՝ սպիտակ:

Դիցուք s քայլից հետո $n \times n$ աղյուսակի բոլոր վանդակները սպիտակ են, այսինքն $F_s(x,y)$ զույգ է, բոլոր $x < n$ և $y < n$ թվերի համար: Դա նշանակում է, որ $F_s(x,y)$–ի ռեկուրսիվ բանաձևը դառնում է հետևյալ տեսքի.

$$F_s(x,y) = \frac{F_s(x,y-1)}{2} + \frac{F_s(x-1,y)}{2} :$$

Ստացվածը Պասկալի եռանկյան անալոգն է, պարզապես հայտարարում կա լրացուցիչ 2: Պասկալի եռանկյան տրամաբանությամբ ստանում ենք, որ

$$F_s(x,y) = \frac{s}{2^{x+y}} C_{x+y}^{x}$$

երբ $x < n$ և $y < n$: Հակառակը նույնպես ճիշտ է, եթե $\frac{s}{2^{x+y}} C_{x+y}^{x}$ թվերը զույգ են, ապա դրանք F_s արժեքներն են (ինդուկցիա ըստ $x+y$-ի): Այսինքն, աղյուսակը s քայլ անց կլինի սպիտակ, միայն և միայն այն դեպքում, երբ

$$v_2(s) + v_2\left(C_{x+y}^{x}\right) \geq x + y + 1.$$

Դիցուք $s = 2^{2n-1-v_2(C_{2n-2}^{n-1})}$ ամենափոքր բնական թիվն է, որի դեպքում $F_s(n-1,n-1)$ զույգ է: Ապացուցենք, որ s-ի այդ արժեքի դեպքում F_s–ի արժեքները $n \times n$ աղյուսակում կլինեն նույնպես զույգ: դրա համար բավական է ցույց տալ, որ $F_s(x,n-1)$ ($y = n-1$ տողը) զույգ են, քանի որ մնացած տողերը միարժեք կերպով վերականգնվում են:

Դիցուք $v_2(C_{2n-2}^{n-1}) = k$: Ապացուցենք, որ ցանկացած $i = 0, 1, \ldots, k$ թվի համար

$$v_2\left(C_{2n-2-i}^{n-1}\right) \geq k - i.$$

Այս առնչությունը ճիշտ է, քանի որ

$$C_{2n-2-i}^{n-1} = C_{2n-2}^{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots(2n-1-i)}$$

և հայտարարի ամեն մի զույգ արտադրիչ ունի իր կեսը համարիչում, այսինքն կարող է ձախ արտադրիչից կրճատել միայն մեկ հատ 2 արտադրիչ: Հետևաբար

$$v_2\left(C_{2n-2-i}^{n-1}\right) \geq v_2\left(C_{2n-2}^{n-1}\right) - \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor = k - \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor \geq k - i:$$