

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

10-րդ դասարան

Երկրորդ օր (18 փետրվարի, 2024թ)

4. Գտե՛ք բոլոր (p, q) պարզ թվերի թվագույգերը, որոնք բավարարում են

$$p^{2q+1} = q^p + 2023$$

հավասարությանը:

Լուծում: Քանի որ p^{2q+1} և q^p թվերի փարբերությունը կենս է, ուրեմն նրանցից մեկը գույգ է, իսկ մյուսը՝ կենս: Ներկայացնենք $p = 2$, կամ $q = 2$:

Դեպք 1. $p = 2$: Այս դեպքում $2^{2q+1} = q^2 + 2023$: Նամաձայն Ֆերմայի փոքր թեորեմի $2^q \equiv 2 \pmod{q}$, հերևարար

$$2^{2q+1} = (2^q)^2 \cdot 2 = 8 \pmod{q} :$$

Ուրեմն

$$8 \equiv 2023 \pmod{q} :$$

Սրացանք, որ q -ն $2023 - 8 = 2015$ -ի բաժանարար է: Քանի որ q -ն պարզ թիվ է, ուրեմն $q = 5, 13$ կամ 31 : Սրուգելով րեսնում ենք, որ լուծում է միայն $q = 5$ դեպքը:

Դեպք 2. $q = 2$: Այս դեպքում

$$p^5 = 2^p + 2023 :$$

Նամաձայն Ֆերմայի փոքր թեորեմի

$$0 \equiv p^5 \equiv 2 + 2023 = 2025 \pmod{p} :$$

Սրացանք, որ p -ն 2025 -ի բաժանարար է: Քանի որ p -ն պարզ թիվ է, ուրեմն $p = 3$ կամ 5 : Սրուգելով րեսնում ենք, որ նրանցից ոչ մեկը չի բավարարում խնդրի պայմաններին:

Պարասխան՝ $(p, q) = (2, 5)$:

5. Դիցուք ABC եռանկյան AC կողմի միջնուղղահայացի վրա նշել են X կետը, որը գտնվում է ABC եռանկյան ներքին փրոտյթում: Դիցուք M -ը BC կողմի միջնակետն է, իսկ B կետից XM -ին փարված ուղղահայաց ուղիղը AC կողմը հատում է N կետում: Դիցուք L -ը N կետից XC հարվածին փարված ուղղահայացի հիմքն է: Ապացուցեք, որ A, B, L, N կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Լուծում

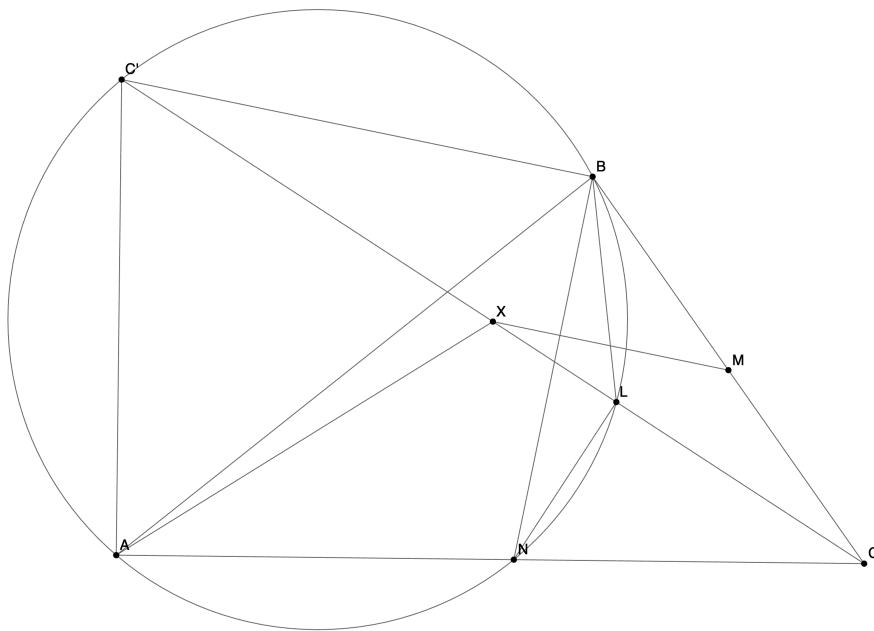
Դիցուք C' կետը C կետի համաչափն է X կետի նկատմամբ:

$$CX = XC' = AX \Rightarrow C'A \perp AC$$

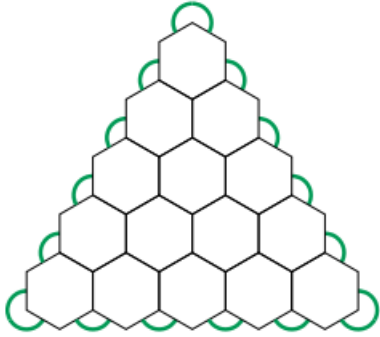
և

$$CX = XC', BM = MC \Rightarrow XM \parallel BC' \Rightarrow C'B \perp BN :$$

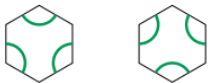
Վերջապես $NL \perp C'L$, որտեղից A, B, N, L, C' կետերով անցնում է շրջանագիծ:



6. Տրված է $1 + 2 + \dots + n$ միանման կանոնավոր վեցանկյուններից կազմված աղյուսակ: Աղյուսակը եզրից շրջապատված է աղեղներով, որոնց կենտրոնները վեցանկյան գագաթներն են և անցնում են համապատասխան կողմերի միջնակետերով:



Յուրաքանչյուր վեցանկյան ներսում կարելի է տեղադրել հեքսյալ պատկերներից մեկնումնեկը (չափերով հավասար են աղյուսակի վեցանկյուններին, իսկ աղեղներն անցնում են կողմերի միջնակետերով):



Գտե՛ք n -ի բոլոր հնարավոր արժեքները, որոնց դեպքում յուրաքանչյուր վեցանկյունում հնարավոր է տեղադրել մեկական պատկեր այնպես, որ բոլոր աղեղները միասին կազմեն մեկ փակ կոր:

Լուծում: Դիցուք պատկերները կամայական ձևով դասավորված են աղյուսակում: Մեկ վանդակի պատկերը պտտելով կարելի է համոզվել, որ փակ կորերի քանակը կան մնում է նույնը, կան էլ փոխվում է 2-ով (լուծումը քննարկելիս պետք է պատկերել և հիմնավորել թե ինչու): Քանի որ պահանջվում է, որ վերջում սրացվի միայն մեկ փակ կոր, ուրեմն ցանակցած դասավորության դեպքում պետք է լինի կենտ քանակությամբ կոր: Ձախ նկարում պատկերված ձևով դասավորելու դեպքում փակ կորերի (շրջանագծերի քանակը)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

է, որը պետք է լինի կենտ: Փաստորեն, n -ը 4-ի բաժանելիս մնացորդում պետք է սրացվի 1 կամ 2: Աջ գծագրում պատկերված է կորի կառուցման օրինակ, որտեղ կորի ներքին փիրույթը ներկած է, որպեսզի ավելի ընկալելի լինի նայելիս:

