

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

10-րդ դասարան, օր 2

ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

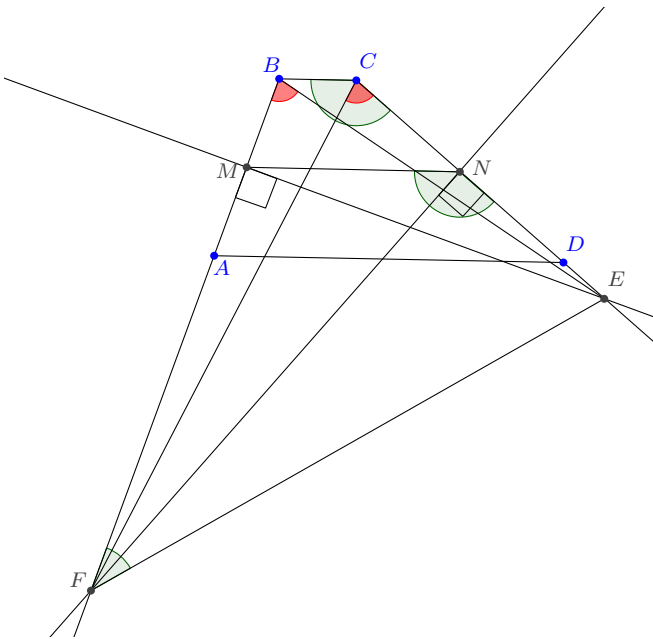
Խնդիր 1. Դիցուք՝ $ABCD$ սեղանի AB եւ CD սրունքների վրա՝ որպես հիմքեր, կառուցված են հավասարասրուն եռանկյուններ այնպես, որ յուրաքանչյուրի երրորդ գագաթն ընկած է մյուս սրունքը պարունակող ուղղի վրա: Ապացուցել, որ այդ եռանկյունները նման են:

Լուծում 1. Դիցուք՝ M, N -ը համապարասխանաբար AB, CD սրունքների միջնակետերն են, E, F ՝ համապարասխան երրորդ գագաթները:

$$\angle EMA = \angle FND = 90^\circ \Rightarrow MNEF \text{ արք. շրջ.} \Rightarrow \angle MFE + \angle MNE = 180^\circ$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \angle MNE = \angle BCE \Rightarrow \angle MFE + \angle BCE = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FBCE \text{ արք. շրջ.} \Rightarrow \angle ABE = \angle DCF \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDF$$



Խնդիր 2. Գտնել բոլոր (x, y) բնական թվազույգերը, որոնք բավարարում են

$$2^x = 3^y + 509$$

հավասարությանը:

Լուծում 2. Դիտարկելով $y = 1, 2$ դեպքերը կստանանք, որ $(9, 1)$ թվազույգը լուծում է: Դիցուք $y \geq 3$: Քանի որ հավասարության աջ մասը 27-ի բաժանելիս փալիս է 23 մնացորդ, ուստի նույնքան մնացորդ պետք է փա աջ մասը: Ստուգելով ստացվում է, որ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $x = 18k + 11$ տեսքի թիվ է: Տեղադրելով, կստանանք, որ

$$(2^{18})^k \cdot 2048 = 3^y + 509 :$$

Քանի որ 2^{18} թիվը 19-ի բաժանելիս մնացորդում սրացվում է 1, ուրեմն դիփարկելով 19-ի բաժանելիս սրացվող մնացորդը սրանում ենք, որ 3^y -ը 19-ի բաժանելիս մնացորդում սրացվում է $2048 - 509 = 1539$ -ին համարժեք մնացորդ: Բայց այդ թիվը բաժանվում է 19-ի, մինչդեռ 3^y չի կարող:

Ներկաբար, միակ լուծումն է $(9, 1)$ թվագույգը:

Խնդիր 3. Ձմեռային սեզոնին ընդառաջ հյուրանոցը բացում է բոլոր 23 սենյակների ամրագրման համակարգը: Պարզվում է, որ ամրագրումներն այնպես են արվել, որ ամբողջ սեզոնի ընթացքում յուրաքանչյուր օր ազատ է ճիշտ մեկ սենյակ: Տնօրենը հանձնարարում է ամրագրումների սենյակները վերադասավորել այնպես, որ միշտ ազատ լինի նույն սենյակը: Արդյո՞ք միշտ է հնարավոր կատարել այդ հանձնարարությունը: Նյութանոցի բոլոր սենյակները նույնն են, հյուրի ժամանումից հետո իր սենյակը փոխել չի կարելի:

Լուծում 3. Այո, հնարավոր է: Ցանկացած օր հյուրանոցում ավարտվում է ճիշտ այնքան ամրագրում, որքան որ սկսվում է: Ներկաբար նոր ժամանողներին կրեդավորեն այդ օրն ազատվող սենյակներում: