Մաթեմատիկա - մարզային փուլ, **11-12-րդ դասարաններ**

Տնողություն – 180րոպե

1. Լուծել $x^2 - x = 13(y^2 - y)$ հավասարումը, որտեղ x-ը և y-ը փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են:

   Լուծում: Պարզ է, որ $x = y = 1$ լուծում է: Քանի, որ $(x, y) = 1$, ապա $\frac{x-1}{y} = \frac{13(y-1)}{x} = p \in N$: Այդ դեպքում $x - 1 = py$ և $13(y - 1) = px$, հետևաբար $13(y - 1) = p(yp + 1) \Leftrightarrow y = \frac{p+13}{13-p^2} \Longrightarrow 13 - p^2 > 0 \Longrightarrow p = 1; 2; 3 \Longrightarrow p = 3, y = 4, x = 13$:

   Պատասխան՝ (1,1); (13,4):

2. Ամբողջ գործակիցներով քառակուսի եռանդամի գրաֆիկը աբսցիսների առանցքը հատում է իրարից տարբեր A և B կետերում, իսկ օրդինատների առանցքը հատում է A-ից և B-ից տարբեր C կետում: Գտնել ACB անկյան հնարավոր մեծագույն արժեքը:

   Լուծում: Նկատենք, $y = x^2 - 1$ պարաբոլի համար ստացվում է 90^0 անկյուն: Ցույց տանք, որ ավելի մեծ անկյուն չի կարող ստացվել:

   Դիցուք տրված է $y = ax^2 + bx + c$ եռանդամը: Եռանդամի աբսցիսների առանցքի հետ հատման կետերը նշանակենք $A(x_1 0)$, $B(x_2, 0)$, իսկ օրդինատների առանցքը հատում է $C(0, c)$: Եթե $\angle ACB$ բութ է, ապա $OA \cdot OB > OC^2$, որը նշանակում է, որ $\left|\frac{x_1 \cdot x_2}{a}\right| > |c^2|$, որն էլ համաձայն Վիետի թեորեմի նշանակում է, որ $\left|\frac{c}{a}\right| > |c^2|$ կամ որ նույնն է $|ac| < 1$, ինչն անհնար է, քանի որ a –ն և c –ն ոչ զրոյական ամբողջ թվեր են:

3. Դիցուք AP, BQ, CH հատվածները ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրություններն են, իսկ M–ը և N-ը համապատասխանաբար AB և QP հատվածների միջնակետերը: Դիցուք CN և AB ուղիղները հատվում են D կետում, իսկ CM և QP ուղիղները հատվում են E կետում: Ապացուցել, որ ED և CH հատվածների միջնակետերը և M-ը գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

Լուծում: $\angle AQB = \angle APB$, հետևաբար A,Q,P,B կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\Delta CPQ \sim \Delta ACB$: Քանի, որ $\frac{CP}{AC} = \frac{NP}{AM}$ և $\angle CPQ = \angle CAB$, հետևաբար $\Delta CNP \sim \Delta ACM$, որտեղից $\angle CNE = \angle EMD$, հետևաբար N, E, D, M կետերով անցնում է շրջանագիծ:

$QM = PM = \frac{AB}{2}$ և $QN = NP$, հետևաբար $MN \perp QP$ և $\angle EDM = \angle ENM = 90$, հետևաբա ED և CH ուղիղներ զուգահեռ են:

Տնօրինություն – 180րոպե

Կատարենք $H_M^k, k = \frac{HM}{DM}$ նմանադրությունը: Այդ դեպքում $DE \to CH$,հետևաբար DE հատվածի միջնակետը անցնում է CH հատվածի միջնակետին:(Օգտվելով եռանկյունների նմանությունից կարելի է ապացուցել, որ սեղանի սրունքները պարունակող ուղիղների հատման կետը և հիմքերի միջնակերը գտնվում են մի ուղղի վրա:)

4. Դիցուք 1,2,3,…,999,1000 բնական թվերից յուրաքանչյուրը ներկել են n գույներից որևէ մեկով: Հայտնի է, որ միևնույն գույնի ներկած երկու տարբեր թվերից ոչ մեկը մյուսին չի բաժանվում: Գտնել n-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում հնարավոր է թվերի այդպիսի ներկում:

   Լուծում: Նկատենք, որ 1,2,4,8,16,32,64,128,256, 512 թվերից ցանկացած երկուսից մեծը բաժանվում է փոքրին, հետևաբար նրանք բոլորն էլ պետք է ունենան տարբեր գույներ, այսինքն անհրաժեշտ է առնվազն 10 գույն: Ցույց տանք, որ 10 գույնով հնարավոր է:

   1 - մեկ գույն,

   2, 3 – մեկ գույն,

   4,5,6,7 – մեկ գույն,

   8,9,10,11,12,13,14,15 – մեկ գույն,

   16,17,18,19,20,. . . . 31 – մեկ գույն,

   32, 33,…,62, 63 – մեկ գույն,

   64, 65,…,126, 127 – մեկ գույն,

   128, 129,…,254, 255 – մեկ գույն,

   256, 257,…,510, 511 – մեկ գույն,

   512, 513,…,999, 1000 – մեկ գույն: