

Տևողությունը – 180րոպե

1. Դիցուք տրված է n բնական թիվը: Կարո՞ղ է արդյոք n և n^3 թվերի թվանշանների քանակների գումարը հավասար լինել 2021:

Լուծում: n -ի թվանշանների քանակը նշանակենք k -ով: Այդ դեպքում ունենք, որ

$$10^{k-1} \leq n < 10^k \text{ և } 10^{3k-3} \leq n^3 < 10^{3k}$$

հետևաբար n^3 թիվը կունենա $3k - 2$, $3k - 1$ կամ $3k$ հատ թվանշան: Ուստի n և n^3 թվերի թվանշանների քանակների գումարը կլինի $4k - 2$, $4k - 1$ կամ $4k$ տեսքի թիվ: Նկատենք, որ 2021-ը 4-ի բաժանելիս տալիս է 1 մնացորդ և չի ներկայացվում $4k - 2$, $4k - 1$ և $4k$ տեսքերից ոչ մեկով:

Պատասխան՝ հնարավոր չէ:

2. Լուծել $x^2 - x = 13(y^2 - y)$ հավասարումը, որտեղ x -ը և y -ը փոխադարձաբար պարզ բնական թվեր են:

Լուծում: Պարզ է, որ $x = y = 1$ լուծում է: Քանի, որ $(x, y) = 1$, ապա $\frac{x-1}{y} = \frac{13(y-1)}{x} = p \in \mathbb{N}$: Այդ դեպքում $x - 1 = py$ և $13(y - 1) = px$, հետևաբար $13(y - 1) = p(py + 1) \Leftrightarrow y = \frac{p+13}{13-p^2} \Rightarrow 13 - p^2 > 0 \Rightarrow p = 1; 2; 3 \Rightarrow p = 3, y = 4, x = 13$:

Պատասխան՝ (1,1); (13,4):

3. Արամն ու Բաբկենը խաղում են հետևյալ խաղը: Սեղանին դրված են 8 քարտեր, որոնցից մեկի վրա գրված է 1 թիվը, երկրորդի վրա գրված է 2 թիվը և այդպես շարունակ՝ ընդհանուր առմամբ գրված են 1-ից 8 բոլոր բնական թվերը: Արամը վերցնում է այդ քարտերից որևէ մեկը, այնուհետև մեկ քարտ ընտրում է Բաբկենը, այնուհետև կրկին ընտրում է Արամը և այդպես շարունակ, մինչև քարտերն ավարտվեն ու երկուսն էլ ունենան չորսական քարտեր: Այնուհետև երկուսն էլ հաշվում են իրենց մոտ եղած քարտերի վրա գրված թվերի գումարը: Եթե երկուսի մոտ էլ պարզ թվեր են կամ երկուսի մոտ էլ բաղադրյալ թվեր են, ապա խաղն ավարտվում է ոչ-ոքի: Հակառակ դեպքում հաղթում է այն խաղացողը ում մոտ ստացվել է պարզ թիվ: Պարզել, թե արդյո՞ք խաղացողների մեկն ունի հաղթական մարտավարություն:

Տևողությունը – 180րոպե

Լուծում: Նկատենք, որ Արամի և Բաբկենի մոտ ստացված թվերի գումարը հավասար է $1 + 2 + \dots + 7 + 8 = 36$, ընդ որում յուրաքանչյուրի մոտ ստացված թիվը առնվազն 10 է, իսկ առավելագույնը 26: Հաղթելու համար յուրաքանչյուր խաղացող պետք է փորձի ստանալ այդ միջակայքի որևէ պարզ թիվ, որոնք են 11,13,17,19,23: Քանի որ $13+23=36$ և $17+19=36$, ուստի 13,17,19,23 թվերը հաղթանակ չեն ապահովի, քանի որ մյուս խաղացողի մոտ նույնպես կստացվի պարզ թիվ և խաղը կավարտվի ոչ-ոքի: Հետևաբար հաղթելու միակ տարբերակը 11 ստանալն է: Բայց 11 ստանալու միակ տարբերակը 1,2,3,5 թվերն ընտրելն է: Ակնհայտ է, որ խաղացողներից յուրաքանչյուրը կարող է մյուսին խանգարել ընտրել այդ չորս քարտերը, քանի որ հենց առաջին քարտին կարող է ընտրել դրանցից ցանկացածը և հակառակորդին զրկել հաղթելու հնարավորությունից: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ ոչ մեկն էլ չունի հաղթական մարտավարություն:

4. Դիցուք AP, BQ, CH հատվածները սուրանկյուն ABC եռանկյան բարձրություններն են, իսկ M -ը և N -ը համապատասխանաբար AB և QP հատվածների միջնակետերը: Դիցուք CN և AB ուղիղները հատվում են D կետում, իսկ CM և QP ուղիղները հատվում են E կետում: Ապացուցել, որ ED և CH ուղիղները զուգահեռ են:

Լուծում: : $\angle AQB = \angle APB$, հետևաբար A, Q, P, B կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից $\triangle CPQ \sim \triangle ACB$: Քանի, որ $\frac{CP}{AC} = \frac{NP}{AM}$ և $\angle CPQ = \angle CAB$, հետևաբար $\triangle CNP \sim \triangle ACM$, որտեղից $\angle CNE = \angle EMD$, հետևաբար N, E, D, M կետերով անցնում է շրջանագիծ: $QM = PM = \frac{AB}{2}$ և $QN = NP$, հետևաբար $MN \perp QP$ և $\angle EDM = \angle ENM = 90^\circ$, հետևաբար ED և CH ուղիղները զուգահեռ են: