IX դասարան

1) Գտնել բոլոր n բնական թվերը, որոնց համար գոյություն ունեն a և b այնպիսի բնական թվեր, որ $n^2 = a+b$ և $n^3 = a^2+b^2$:

Լուծում1: Քանի, որ $n^3 = a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{n^4}{2}$, հետևաբար $n \leq 2$:

Քանի, որ $n^2 = a+b \geq 2$, հետևաբար $n \geq 2$, որտեղից $n=2$, հետևաբար $a=b=2$:

1) $n^2 = a+b \geq 2$, հետևաբար $n \geq 2$ 1 միավոր

2) $n^3 = a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{n^4}{2}$ 3 միավոր

3) $n=2$ 1 միավոր

4) $a=b=2$ 2 միավոր

Լուծում2: Քանի, որ $n^3 = a^2+b^2 \geq 2ab$ և $n^4 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = n^3+2ab \leq 2n^3$, հետևաբար $n \leq 2$:

Քանի, որ $n^2 = a+b \geq 2$, հետևաբար $n \geq 2$, որտեղից $n=2$, հետևաբար $a=b=2$:

1) $n^2 = a+b \geq 2$, հետևաբար $n \geq 2$ 1 միավոր

2) $n^3 = a^2+b^2 \geq 2ab$ 2 միավոր

3) $n^4 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = n^3+2ab \leq 2n^3$ 3 միավոր

4) $a=b=2$ 1 միավոր

Լուծում 3: Դիցուք $a \geq b$: Այդ դեպքում $a \geq \frac{n^2}{2}$ և $n^3 = a^2+b^2 > a^2 \geq \frac{n^4}{4}$ որտեղից $n \leq 4$:

Քանի, որ $n^2 = a+b \geq 2$, հետևաբար $n \geq 2$:

Երբ $n=2$, ապա $a=b=2$: $n=3$ և $n=4$ դեպքերը չեն բավարարում:

1) $n^2 = a+b \geq 2$, հետևաբար $n \geq 2$ 1 միավոր

2) $a \geq b$ և $a \geq \frac{n^2}{2}$ 2 միավոր

3) $n^3 = a^2+b^2 > a^2 \geq \frac{n^4}{4}$ 3 միավոր

4) $a=b=2$ 1 միավոր

Դիտողություն 1: Քննարկված է $n=1,2$ դեպքերը և ստացված է $a=b=2$: 1 միավոր

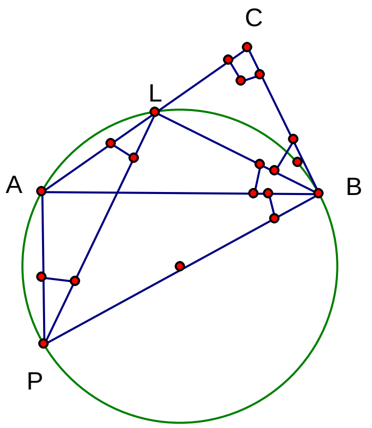
Դիտողություն 2: Ստացվել է n–ի սահմանափակ քանակությամբ արժեքներ: 3 միավոր

2) Դիցուք BL –ը $ABC(\angle C = 90^{\circ})$ ուղղանկյուն եռանկյան կիսորդն է, իսկ O -ն ALB եռանկյանն արտագծած ω շրջանագծի կենտրոնն է: Դիցուք BO ուղիղը ω –ն հատում է P կետում: Ապացուցել, որ $AL = AP$:

Լուծում : Քանի, որ BP –ն տրամագիծ է, հետևաբար $\angle PLB = 90^{\circ}$:

$\angle ALP = 180^{\circ} - \angle PLB - \angle CLB = 90^{\circ} - \angle CLB = \angle CBL$:

Քանի, որ $\angle APL = \angle ABL = \angle CBL = \angle ALP$, հետևաբար $AL = AP$:



1) $\angle PLB = 90^{\circ}$ 1 միավոր

2) $\angle ALP = \angle CBL$ 3 միավոր

3) $\angle APL = \angle ABL$ 1 միավոր

4) Խնդիրը ավարտած է: 2 միավոր

3) Տրված են 11 իրարից տարբեր բնական թվեր: Հայտնի է, որ նրանցից կամայական 6 հատի գումարը մեծ է մնացած 5-ի գումարից: Գտեք այդ թվերից ամենափոքրի հնարավոր փոքրագույն արժեքը:

Լուծում: Դիցուք $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$ և $a_1 + a_2 + \ldots + a_6 > a_7 + a_8 + \ldots + a_{11}$: Այդ դեպքում $a_7 \geq a_6 + 1 \geq a_5 + 2 \geq a_4 + 3 \geq a_3 + 4 \geq a_2 + 5$: Նմանապես $a_8 \geq a_3 + 5, a_9 \geq a_4 + 5, \ldots, a_{11} \geq a_6 + 5$, հետևաբար $a_1 + a_2 + \ldots + a_6 > a_7 + a_8 + \ldots + a_{11} \geq a_2 + 5 + a_3 + 5 + \ldots + a_6 + 5$, որտեղից $a_1 > 25$, հետևաբար a_1-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը 26–ն է: Հեշտ է ստուգել, որ 26,27,28,...36 թվերի հաջորդականությունը բավարարում է խնդրի պայմանջին:

1) $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$ և $a_1 + a_2 + \ldots + a_6 > a_7 + a_8 + \ldots + a_{11}$: 1 միավոր

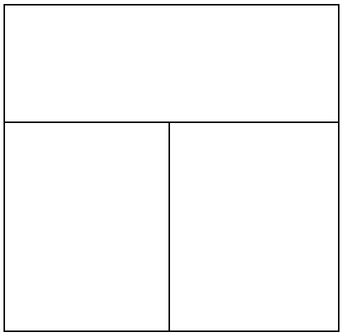
2) $a_{i+5} \geq a_i + 5 (2 \leq i \leq 6)$ 3 միավոր

3) $a_1 > 25$ 1 միավոր

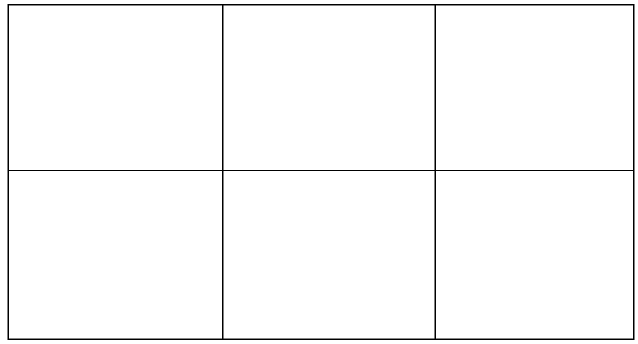
4) Խնդրին բավարարող օրինակ: 2 միավոր

4)) Հնարավո՞ր է արդյոք 20×20 չափանի վանդակավոր քառակուսու որոշ վանդակներ ներկել այնպես, որ կամայական 4×5 չափանի ուղղանկյուն պարունակի ճիշտ 4 հատ ներկած վանդակ, իսկ կամայական 8×8 չափի քառակուսի՝ ճիշտ 13 հատ:

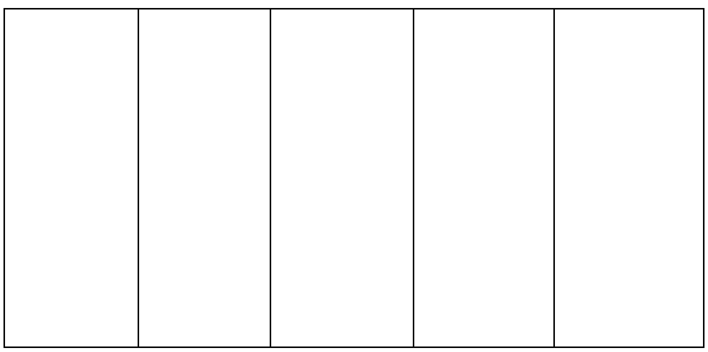
Լուծում: 8×8 չափի քառակուսին բաժանենք երկու հատ 4×5 և մեկ հատ 8×3 չափի ուղղանկյունների:(տես նկար 1)



Նկար 1



Նկար 2



Նկար 3

Այդ դեպքում 8×3 չափի ուղղանկյունում պետք է ներկված լինի 5 վանդակ:

Եթե 8×15 չափի ուղղանկյունը բաժանենք վեց հատ 4×5 ուղղանկյունների(տես նկար 2), ապա նրանում ներկված կլինի 24 վանդակ: Եթե 8×15 չափի ուղղանկյունը բաժանենք 5 հատ 8×3 ուղղանկյունների (տես նկար 3) , ապա նրանում ներկված կլինի 25 վանդակ, որը հակասություն է:

1) 8×3 չափի ուղղանկյունում պետք է ներկված լինի 5 վանդակ: 2 միավոր

2) 8×15 չափի ուղղանկյունը բաժանված է վեց հատ 4×5 ուղղանկյունների 3 միավոր

3) 8×15 չափի ուղղանկյունը բաժանված 5 հատ 8×3 ուղղանկյունների 2 միավոր