

XI- XII դասարան

1) Գտնել, թե n -ի n^2 ը բնական արժեքների դեպքում $\left[\frac{n^3 - n - 5}{6} \right]$ արտահայտության արժեքը բնական պարզ թիվ է:

($[x]$ -ը x -ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվն է:)

Լուծում: $\left[\frac{n^3 - n - 5}{6} \right] = \left[\frac{n^3 - n - 6}{6} + \frac{1}{6} \right] = \left[\frac{n^3 - n - 6}{6} \right]$, քանի, որ $n, n-1, n+1$ թվերից գոնե

մեկը գույգ է և ուղիղ մեկը բաժանվում են 3-ի, հետևաբար $\frac{n^3 - n - 6}{6}$ թիվը ամբողջ է,

որտեղից $\left[\frac{n^3 - n - 6}{6} \right] = \frac{n^3 - n - 6}{6} = \frac{(n-2)(n^2 + 2n + 3)}{6}$:

Քանի, որ $n^2 + 2n + 3 > n - 2 > 6$, երբ $n > 8$, հետևաբար $\frac{(n-2)(n^2 + 2n + 3)}{6}$ թիվը պարզ չէ, , հետևաբար $3 \leq n \leq 8$, որոնցից բավարարում են $n = 3; 5; 8$ թվերը:

1) $\left[\frac{n^3 - n - 5}{6} \right] = \left[\frac{n^3 - n - 6}{6} + \frac{1}{6} \right] = \left[\frac{n^3 - n - 6}{6} \right]$: 2 միավոր

2) $\frac{n^3 - n - 6}{6}$ թիվը ամբողջ է,: 1 միավոր

3) $\left[\frac{n^3 - n - 6}{6} \right] = \frac{n^3 - n - 6}{6} = \frac{(n-2)(n^2 + 2n + 3)}{6}$: 1 միավոր

4) $3 \leq n \leq 8$: 2 միավոր

5) Ստացվել է բոլոր պատասխանները: 1 միավոր

* Դիտողություն: Եթե $\left[\frac{n^3 - n - 6}{6} \right] = \frac{n^3 - n - 6}{6} = \frac{(n-2)(n^2 + 2n + 3)}{6}$ քայլից հետո խնդրի

լուծումը շարունակված է 10.1-ի նման և չի քննարկված բոլոր դեպքերը, ապա 5 միավոր

2) Գտնել բոլոր n բնական թվերը, որոնց համար գոյություն ունեն a, b, c բնական թվեր այնպես, որ $n^2 = a + b + c$ և $n^4 = a^3 + b^3 + c^3$:

Լուծում1: Քանի, որ $n^4 = a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a+b+c)^3}{9} = \frac{n^6}{9}$, հետևաբար $n \leq 3$:

(Այստեղ օգտվեցինք $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$ անհավասարությունից)

Քանի, որ $n^2 = a + b + c \geq 3$, հետևաբար $n \geq 2$: Ենթադրենք $a \geq b \geq c$: Երբ $n=2$, $a+b+c=4$ հավասարմանը բավարարում է $(2,1,1)$ եռյակը, իսկ $a^3 + b^3 + c^3 = 10 \neq 16$:

Երբ $n=3$, $a+b+c=9$ հավասարմանը բավարարում են $(4,4,1), (4,3,2), (3,3,3)$ եռյակները, որոնցից $a^3 + b^3 + c^3 = 81$ հավասարմանը բավարարում է $(3,3,3)$ եռյակը:

1) $n^2 = a + b + c \geq 3$, հետևաբար $n \geq 2$

1 միավոր

2) $n^4 = a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{(a+b+c)^3}{9} = \frac{n^6}{9}$

4միավոր

3) $n=3, a=b=c=3$

2 միավոր

Լուծում2: Ենթադրենք $a \geq b \geq c$: Քանի, որ $n^2 = a + b + c \leq 3a$, հետևաբար $a \geq \frac{n^2}{3}$ և

$n^4 = a^3 + b^3 + c^3 > a^3 \geq \frac{n^6}{27}$, որտեղից $n \leq 5$: Քանի, որ $n^2 = a + b + c \geq 3$, հետևաբար $n \geq 2$:

Երբ $n=2$, $a+b+c=4$ հավասարմանը բավարարում է $(2,1,1)$ եռյակը, իսկ $a^3 + b^3 + c^3 = 10 \neq 16$:

Երբ $n=3$, $a+b+c=9$ հավասարմանը բավարարում են $(4,4,1), (4,3,2), (3,3,3)$ եռյակները, որոնցից $a^3 + b^3 + c^3 = 81$ հավասարմանը բավարարում է $(3,3,3)$ եռյակը:

Երբ $n=4$, $a+b+c=16$ հավասարմանը բավարարում են $(6,6,4), (6,5,5)$ եռյակները, որոնք չեն բավարարում $a^3 + b^3 + c^3 = 256$ հավասարմանը :

Երբ $n=5$, $a+b+c=25$ հավասարմանը բավարարում են $(9,9,7), (9,8,8)$ եռյակները, որոնք չեն բավարարում $a^3 + b^3 + c^3 = 625$ հավասարմանը :

1) $n^2 = a + b + c \geq 3$, հետևաբար $n \geq 2$

1 միավոր

2) $n^4 = a^3 + b^3 + c^3 > a^3 \geq \frac{n^6}{27}$

3 միավոր

3) $n=5$

1 միավոր

4) $n=4$

1 միավոր

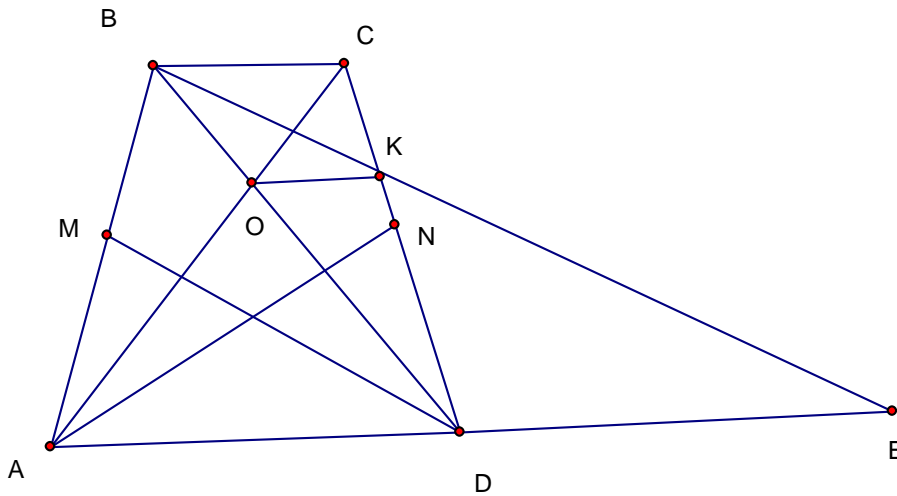
5) $n=3, a=b=c=3$

1 միավոր

3) Դիցուք AD մեծ և BC փոքր հիմքերով $ABCD$ հավասարաարուն սեղանում O -ն անկյունագծերի հատման կետն է, իսկ N -ը CD հատվածի միջնակետն է: Դիցուք O կետից AD -ին տարված զուգահեռ ուղիղը CD -ն հատում է K կետում: Ապացուցել, որ A, B, K, N կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Լուծում1: Դիցուք AD և BK ուղիղները հատվում են E կետում և M -ը AB հատվածի միջնակետն է: Քանի, որ $\triangle DEK \sim \triangle BCK$, հետևաբար $\frac{DE}{BC} = \frac{KD}{CK}$: Ըստ Թալեսի թեորեմի՝

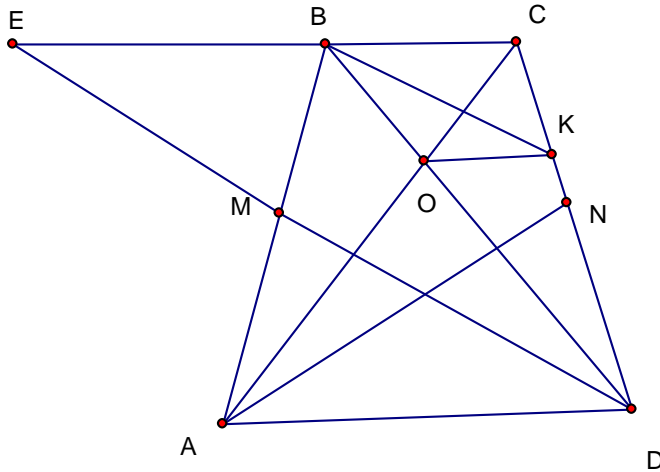
$$\frac{DK}{KC} = \frac{AO}{CO} \text{ և } \triangle AOD \sim \triangle BOC, \text{ հետևաբար } \frac{AO}{CO} = \frac{AD}{BC}:$$



Համադրելով ստացված հարաբերությունները կստանանք՝ $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{BC}$, որտեղից՝ $AD = DE$ և $AM = BM$, հետևաբար DM -ը ABE եռանկյան միջին գիծն է, հետևաբար $BK \parallel DM$, որտեղից՝ $\angle AMD = \angle AND = \angle MBK$, հետևաբար A, B, K, N կետերով անցնում է շրջանագիծ:

- | | |
|--|----------|
| 1) AD և BK ուղիղները հատվում են E կետում | 1 միավոր |
| 2) M -ը AB հատվածի միջնակետն է | 1 միավոր |
| 3) $\frac{DE}{BC} = \frac{KD}{CK}$ | 1 միավոր |
| 4) $\frac{DK}{KC} = \frac{AO}{CO}$ | 1 միավոր |
| 5) $BK \parallel DM$ | 1 միավոր |
| 6) A, B, K, N կետերով անցնում է շրջանագիծ: | 2 միավոր |

Լուծում2: Դիցուք DM և BC ուղիղները հատվում են E կետում և M -ը հատվածի միջնակետն է: Քանի, որ $\triangle FBM = \triangle AMD$, , հետևաբար $AD = BE$:



Քանի, որ $\triangle AOD : \triangle BOC$, հետևաբար $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO}$: Ըստ Թալեսի թեորեմի՝ $\frac{DK}{KC} = \frac{AO}{CO}$,
 հետևաբար $\frac{EB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{DK}{KC} \Rightarrow BK \parallel DM$, որտեղից՝ $\angle AMD = \angle AND = \angle MBK$,
 հետևաբար A, B, K, N կետերով անցնում է շրջանագիծ:

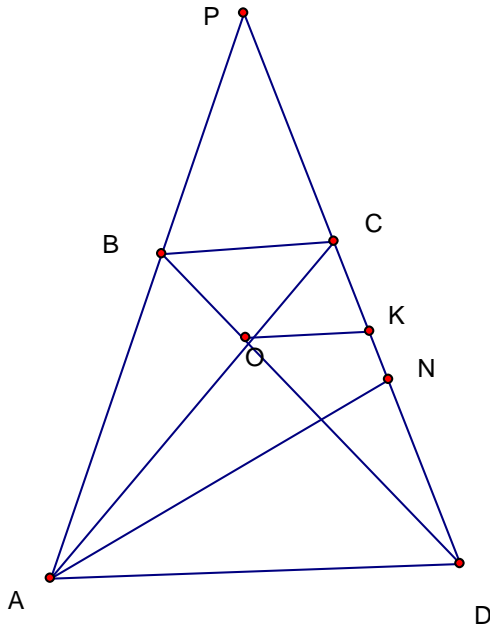
- | | |
|--|----------|
| 1) DM և BC ուղիղները հատվում են E կետում: | 1 միավոր |
| 2) $AD = BE$ | 1 միավոր |
| 3) M -ը AB հատվածի միջնակետն է | 1 միավոր |
| 4) $\frac{DK}{KC} = \frac{AO}{CO}$ | 1 միավոր |
| 5) $\frac{EB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{DK}{KC} \Rightarrow BK \parallel DM$ | 1 միավոր |
| 6) A, B, K, N կետերով անցնում է շրջանագիծ: | 2 միավոր |

Լուծում3: Դիցուք AB և CD ուղիղները հատվում են P կետում և $AD = b, BC = a$: Քանի, որ $\triangle BOC : \triangle AOD$, հետևաբար $BO = ax, DO = bx$:

$\triangle DOK : \triangle BCD$, հետևաբար $CK = at, DK = bt$:

$\triangle APD : \triangle BPC$, հետևաբար

$$\frac{PC}{PD} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{PC + at + bt}{PC} = \frac{a}{b} \Rightarrow PC = \frac{at(a+b)}{b-a}, PK = PC + CK = \frac{2abt}{b-a},$$



$$PD = PC + CD = \frac{tb(a+b)}{b-a}, \quad PN = PC + CN = \frac{t(a+b)^2}{2(b-a)}: \text{Եթե } A, B, K, N \text{ կետերով անցնում է}$$

շրջանագիծ, ապա $AP \cdot BP = PC \cdot PD = PK \cdot PN$ որը ճիշտ է:

- | | |
|--|----------|
| 1) AB և CD ուղիղները հատվում են P կետում | 1 միավոր |
| 2) $AP \cdot BP = PC \cdot PD$ | 1 միավոր |
| 3) $CK = at, DK = bt$ | 1 միավոր |
| 4) $PC = \frac{at(a+b)}{b-a}$, | 1 միավոր |
| 5) $PK = \frac{2abt}{b-a}$ | 1 միավոր |
| 6) Խնդիրը ավարտած է: | 2 միավոր |

4) Շրջանագծի վրա նշված է 30 կետ, որոնցից յուրաքանչյուր երկուսը միացված են հատվածով: Այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը կամայական ձևով ներկել են երկու գույներից մեկով՝ կարմիր կամ կապույտ, ընդ որում կապույտ հատվածների քանակը գույգ է: Թույլատրվում է կամայական տարագույն եռանկյան երկու միագույն կողմերը ներկել այնպես, որ եռանկյունը դառնա միագույն: Կարելի է արդյոք այդ գործողության միջոցով բոլոր հատվածները ներկել միագույն:

Լուծում: Հատվածների քանակը հավասար է $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$, որը կենտ թիվ է, հետևաբար յուրաքանչյուր քայլից հետո կարմիր գույնի հատվածների քանակը կենտ է, իսկ կապույտ գույնի հատվածների քանակը գույգ: Ենթադրենք հնարավոր չէ բոլոր հատվածները ներկել կարմիր գույնով: Քննարկենք այն դեպքը, որը բոլոր հնարավոր դեպքերից այն է, որում կարմիր հատվածների քանակը մեծագույն է:

Կասենք, որ կետը կապույտ է, եթե նրանից դուրս է գալիս գոնե մեկ կապույտ հատված: Քանի, որ կա կապույտ հատված և նրանց քանակը գույգ է, ապա կապույտ հատվածների քանակը գոնե 2 է, հետևաբար կա գոնե երեք կապույտ գագաթ:

Դիցուք A և B գագաթները կապույտ են: Ապացուցենք, որ AB հատվածը ներկած է կապույտ: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն այն կարմիր է: Եթե գոյություն ունի C գագաթ, որ AC և BC հատվածները կապույտ են, ապա նրանք կարելի է ներկել կարմիր գույնով, որը հնարավոր չէ, քանի որ կարմիր հատվածների քանակը մեծագույն էր, հետևաբար այդպիսի C կետ գոյություն չունի:

Այսպիսով կգտվեն C և D կետեր այնպես, որ AC, BD հատվածները կապույտ են, իսկ BC, AD հատվածները՝ կարմիր: Եթե հերթականությամբ ներկենք ABC եռանկյան կողմերը կապույտ, իսկ ABD և ABC եռանկյան կողմերը կարմիր, ապա կարմիր հատվածների քանակը կավելանա: Ապացուցվածից հետևում է, որ կապույտ գագաթները միացնող հատվածները կապույտ է, իսկ մնացած հատվածները կարմիր:

Դիցուք A, B, C կետերը կապույտ են, իսկ D -ն՝ ոչ: Եթե հերթականությամբ ներկենք ABD եռանկյան AD, BD կողմերը կապույտ, իսկ ACD և BCD եռանկյան AC, AD, BC, BD կողմերը կարմիր, ապա կարմիր հատվածների քանակը կավելանա, որը հնարավոր չէ, քանի, որ կարմիր հատվածների քանակը մեծագույն էր, հետևաբար կապույտ հատվածներ քննարկված դեպքում չկան:

- | | |
|--|----------|
| Յուրաքանչյուր քայլից հետո կապույտ գույնի հատվածների քանակը գույգ է: | 1 միավոր |
| Քննարկած է այն դեպքը, երբ կարմիր հատվածների քանակը մեծագույն է: | 1 միավոր |
| A և B գագաթները կապույտ են, ապա AB հատվածը նույնպես կապույտ է: | 3 միավոր |
| Խնդիրը ավարտել է | 2 միավոր |