Մաթեմատիկայի մարզային օլիմպիադա

8-րդ դասարան

1. Տրված են a,b,c բնական թվերը: Ապացուցել, որ $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ թվերից գոնե մեկը բաժանվում է 4-ի:

Լուծում: a,b,c թվերից երկուսը ունեն նույն զույգությունը՝ օրինակ a և b թվերը: Քանի, որ $a^3b-ab^3=ab(a-b)(a+b)$, իսկ $a-b$ և $a+b$ թվերը զույգ են, ուստի a^3b-ab^3 թիվը բաժանվում է 4-ի:

2. Գրատախտակին որևէ հերթականությամբ գրել են բոլոր երկնիշ թվերի թվանշանների արտադրյալը: Կարելի՞ է արդյոք այդ թվերի միջև դնել $+$ կամ $-$ նշաններն այնպես, որ ստացված արտահայտության արժեքը հավասար լինի 0:

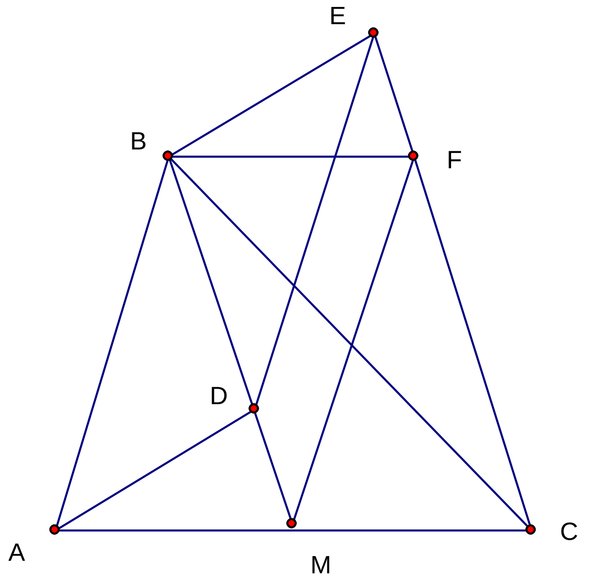
Դիտողություն: *Գրատախտակին գրված թվերն իրար կպցնել չի կարելի*

Լուծում: Քանի, որ կենտ թվանշաններով գրվող երկնիշ թվերի քանակը 25 է, ուստի այդ արտադրյալներից 25-ը կենտ են, հետևաբար այդ արտադրյալների գումարը կենտ է: Քանի, որ կամայական ձևով $+$ կամ $-$ նշանները դնելուց արտահայտության զույգությունը չի փոխվում, ուստի արտահայտության արժեքը չի կարող հավասարվել 0-ի:

** Կարելի է հաշվել այդ արտադրյալների գումարը՝ $S=(1+2+\cdots+9)^2=45^2$:

3. ABC եռանկյան BM միջնագծի վրա նշված է կամայական D կետ: D-ից AB կողմին տարված զուգահեռ ուղիղը և C կետից BM միջնագծին տարված զուգահեռ ուղիղը հատվում են E կետում: Ապացուցել, որ $BE=AD$:

Լուծում: Ապացույց 1. M կետով տանենք DE ուղղին զուգահեռ MF ուղիղը: Քանի որ $MDEF$-ը զուգահեռագիծ է, ապա $DE=MF$:



$\angle A=\angle FMC$, $\angle BMA=\angle FCM$, $AM=MB \Rightarrow \triangle ABM=\triangle FMC$ հետևաբար $AB=MF$:
Այսպիսով $AB=DE$ և $AB \parallel DE$, ուստի $ABED$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որտեղից $AD=BE$:

Ապացույց 2: Դիցուք F – ը M կետի համաչափն է BC հատվածի միջնակետի նկատմամբ: Քանի, որ $MBFC$ -ն զուգահեռագիծ է, ուստի $F \in EC$, հետևաբար $MC = BF = AM$ և $BF \parallel AC$: Այդ դեպքում $ABFM$ և $DEFM$ քառանկյունները զուգահեռագծեր են, որտեղից $MF \parallel DE \parallel AB$ և $MF = AB = DE$, ուստի $ABED$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որտեղից $AD = BE$:

4. Հինգ արկղերում կա 21 գնդիկ, ընդ որում կամայական երկու արկղերում գնդիկների քանակը տարբեր է: Հայտնի է, որ կամայական երկու արկղերի բոլոր գնդիկները կարելի է տեղավորել մյուս երեք արկղերում այնպես, որ այդ երեք արկղերներից յուրաքանչյուրում գնդիկների քանակը լինի հավասար: Ապացուցել, որ արկղերից մեկում կա ուղիղ 7 գնդիկ: Բերել խնդրի պայմաններին բավարարող համապատասխան օրինակ:

Լուծում: Արկղերից որևէ մեկում չի կարող 7-ից ավելի գնդիկ լինել քանի, որ մնացած արկղերից որևէ երկուսի գնդիկները հնարավոր չէ տեղավորել մնացած արկղերում այնպես, որ յուրաքանչյուրում լինի 7-ական գնդիկ:

Քանի, որ $2+3+4+5+6 = 20 < 21$, հետևաբար արկղերից յուրաքանչյուրում 7-ից պակաս գնդիկ լինել չի կարող, ուստի գոյություն ունի արկղ, որում կա ուղիղ 7 գնդիկ:
7,5,4,3,2 օրինակը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

9-րդ դասարան

1. Տրված են a,b,c բնական թվերը: Ապացուցել, որ $a^5b-ab^5, b^5c-bc^5, c^5a-ca^5$ թվերից գոնե մեկը բաժանվում է 8-ի:

Լուծում: a,b,c թվերից երկուսը ունեն նույն զույգությունը՝ օրինակ a և b թվերը: Քանի, որ $a^5b-ab^5=ab(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, իսկ $a-b$, $a+b$, a^2+b^2 թվերը զույգ են, ուստի a^5b-ab^5 թիվը բաժանվում է 8–ի:

2. Դիցուք $a>0, b>0$ և $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=5$: Ապացուցել, որ $1\le a+b\le 4$:

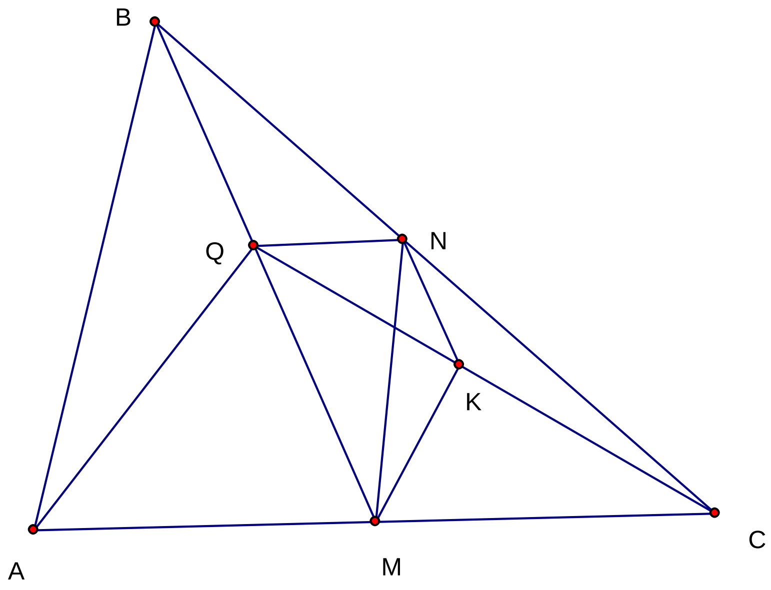
Լուծում: Քանի, որ $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=4 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$,հետևաբար

$$5=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge a+b+\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow(a+b-1)(a+b-4)\le 0\Leftrightarrow 1\le a+b\le 4:$$

** Կարելի է օգտվել $\frac{a+b}{2}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, անհավասարությունից, որտեղ $a>0, b>0$:

3. ABC եռանկյան BM միջնագծի վրա վերցրել են Q կետն այնպես, որ $\angle AQC=90^0$ և $\angle QBA=\angle QCA$: Գտնել QNM անկյան մեծությունը, որտեղ N-ը BC կողմի միջնակետն է:

Լուծում: Դիցուք K-ն QC հատվածի միջնակետն է: Այդ դեպքում



$NK \parallel BQ,\ MN \parallel AB \Rightarrow \angle MNK=\angle ABQ$: Քանի որ $\angle AQC=90^0$, ապա $AM=MC=QM$, որտեղից $\angle MQC = \angle MCQ$: Քանի որ $\angle MQK = \angle MNK$, ապա $MQNK$ քառանկյունը ներգծելի է, ուստի $\angle QNM = \angle MKQ = 90^0$:

4. Սեղանին դրված են 1սմ, 2 սմ, …, 99սմ, 100 սմ երկարությամբ փայտիկներ: Վարդանը և Արմենը խաղում են հետևյալ խաղը. Նրանք հերթով սեղանից հեռացնում են փայտիկներ՝ Վարդանը մեկ հատ, իսկ Արմենը երկու հատ, մինչև սեղանին մնա երեք փայտիկ: Եթե մնացած երեք փայտիկներով հնարավոր է կազմել եռանկյուն, ապա հաղթում է Վարդանը, հակառակ դեպքում հաղթում է Արմենը: Խաղը սկսում է Վարդանը: Ո՞վ կհաղթի ճիշտ խաղալու դեպքում:

Լուծում: Պատասխան. Վարդանը: Առաջին 32 քայլով Վարդանը կարող է հասնել նրան, որ սեղանից հեռացվեն 1-ից մինչև 32 երկարությամբ բոլոր փայտիկները: Այդ դեպքում Վարդանի վերջին քայլից առաջ սեղանին կմնան 4 փայտիկներ $a > b > c > d > 32$: Որպեսզի հաղթի Արմենը պետք է տեղի ունենան $c + d \leq b$ և $b + c \leq a$ պայմանները: Բայց այդ դեպքում՝ $b \geq c + d \geq 33 + 34 = 67$ և $a \geq b + c \geq 67 + 34 = 101$, ինչը հնարավոր չէ:

10-րդ դասարան

1. Տրված են a,b,c բնական թվերը: Ապացուցել, որ $a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ թվերից գոնե մեկը բաժանվում է 12-ի:

Լուծում: a,b,c թվերից երկուսը ունեն նույն զույգությունը՝ օրինակ a և b թվերը: Քանի, որ $a^3b-ab^3=ab(a-b)(a+b)$, իսկ $a-b$ և $a+b$ թվերը զույգ են, ուստի a^3b-ab^3 թիվը բաժանվում է 4-ի:

Եթե a և b թվերը 3-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները հավասար են, ապա $a-b \vdots 3$:

Եթե a և b թվերը 3-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները տարբեր են, ապա $a+b \vdots 3$, հետևաբար՝ $a^3b-ab^3 \vdots 12$:

2. Ապացուցել $\sqrt{a+b} \geq \dfrac{a+b+2}{3}$ անհավասարությունը, որտեղ $a>0, b>0$ և $a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=5$:

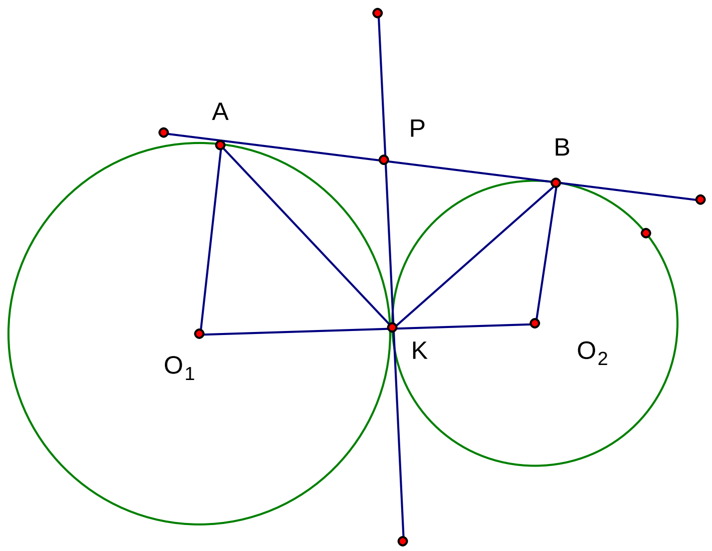
Լուծում: $\sqrt{a+b} \geq \dfrac{a+b+2}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a+b}-1\right)\left(\sqrt{a+b}-2\right) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{a+b} \leq 2$:

Քանի, որ $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}=2 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$, հետևաբար

$$5=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq a+b+\frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b-1)(a+b-4) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a+b \leq 4 \Leftrightarrow \ 1 \leq \sqrt{a+b} \leq 2:$$

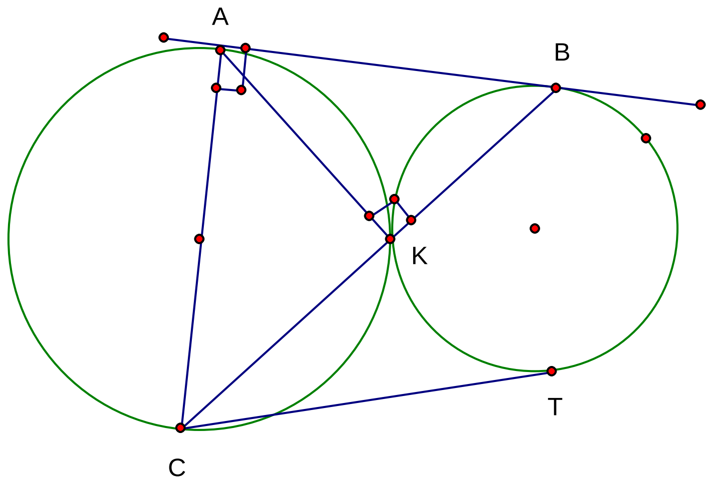
3. Դիցուք ω_1 և ω_2 շրջանագծերն իրար արտաքնապես շոշափում են K կետում: Այդ շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողն ω_1-ը շոշափում է A կետում, իսկ ω_2-ը՝ B կետում: Դիցուք BK ուղիղը ω_1-ը հատում է C կետում, իսկ CT-ն C կետից ω_2-ին տարված շոշափողն է: Ապացուցել, որ AC=CT:

Լուծում: Նախ ապացուցենք, որ $\angle AKB=90^\circ$:



I եղանակ: Դիցուք O_1–ը և O_2-ը ω_1 և ω_2 շրջանագծերի կենտրոններն են, իսկ $\angle AO_1K = 2\alpha$:
Քանի, որ $\angle AO_1K + \angle BO_2K = 180^\circ \Rightarrow \angle BKO_2 = \alpha$ և $\angle AKO_1 = 90^\circ - \alpha$, հետևաբար $\angle AKO_1 + \angle BKO_2 = 90^\circ$ որտեղից $\angle AKB = 90^\circ$:

II եղանակ: Դիցուք ω_1 և ω_2 շրջանագծերի K կետում տարված ընդհանուր շոշափողը AB հատվածը հատում է P կետում: Այդ դեպքում AP=PK=PB, հետևաբար $\angle AKB = 90^\circ$:



Քանի, որ $\angle AKC = 90^\circ$, հետևաբար AC–ն տրամագիծ է, ուստի $\angle CAB = 90^\circ$: Այդ դեպքում $AC^2 = CK \cdot CB = CT^2$, հետևաբար AC=CT:

4. 1,2,…,100 բնական թվերից ընտրել են կամայական 20 տարբեր թվեր: Ապացուցել, որ ընտրված թվերի մեջ կգտնվեն չորսը, որոնցից երկուսի գումարը հավասար է մյուս երկուսի գումարին:

Լուծում: Նախ նշենք , որ $a+b=c+d \Leftrightarrow a-c=d-b$ պայմանին: Ընտրված թվերը դասավորենք աճման կարգով՝ $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$ և դիտարկենք հետևյալ գումարները՝
$P=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\ldots+(a_{20}-a_{19})$ և $S=(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\ldots+(a_{19}-a_{18})$: Եթե փակագծերում գրված բոլոր տարբերությունները լինեն տարբեր, ապա $P \ge 1+2+\ldots+10=55$ և $S \ge 1+2+\ldots+9=45$: Ուստի $P+S \ge 100$: Մյուս կողմից $P+S=a_{20}-a_1 \le 99$: Ուստի որևէ երկու տարբերություններ իրար հավասար են, որտեղից էլ հետևում է խնդրի պահանջը:

11-րդ դասարան

1. Տրված են a,b,c բնական թվերը: Ապացուցել, որ $a^5b-ab^5, b^5c-bc^5, c^5a-ca^5$ թվերից գոնե մեկը բաժանվում է 24-ի:

Լուծում: a,b,c թվերից երկուսը ունեն նույն զույգությունը՝ օրինակ a և b թվերը: Քանի, որ $a^5b-ab^5=ab(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, իսկ $a-b$, $a+b$, a^2+b^2 թվերը զույգ են, ուստի a^5b-ab^5 թիվը բաժանվում է 8–ի:

Եթե a և b թվերը 3–ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները հավասար են, ապա $a-b\vdots 3$:

Եթե a և b թվերը 3–ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները տարբեր են, ապա $a+b\vdots 3$, հետևաբար՝ $a^5b-ab^5\vdots 24$:

2. Ապացուցել $\sqrt{a+b+c}\ge\frac{a+b+c+3}{4}$ անհավասարությունը, որտեղ $a>0, b>0, c>0$ և $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$:

Լուծում: $\sqrt{a+b+c}\ge\frac{a+b+c+3}{4}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a+b+c}-1\right)\left(\sqrt{a+b+c}-3\right)\le 0\Leftrightarrow 1\le\sqrt{a+b+c}\le 3$:

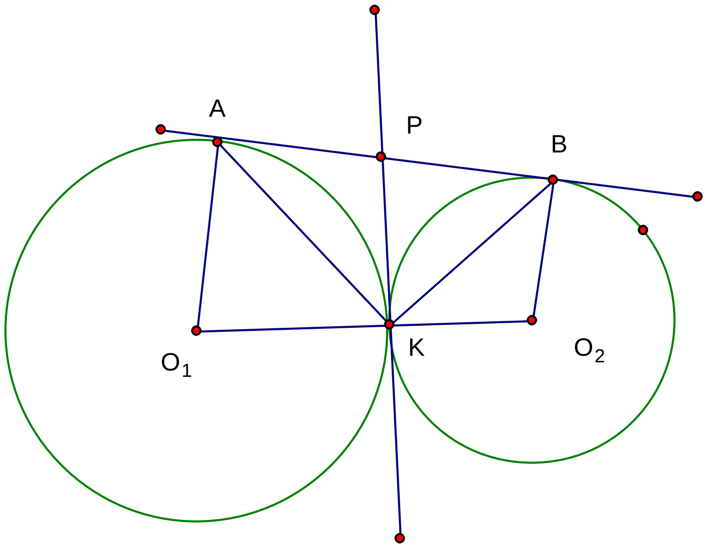
Քանի, որ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=9\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$, հետևաբար

$10=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c+\frac{9}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+b+c-1)(a+b+c-9)\le 0\Leftrightarrow 1\le a+b+c\le 9\Leftrightarrow$ $1\le\sqrt{a+b+c}\le 3$:

** Կարելի էր կիրառել $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\cdots a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots b_n}$ անհավասարությունը, որտեղից $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}=\frac{9}{a+b+c}$:

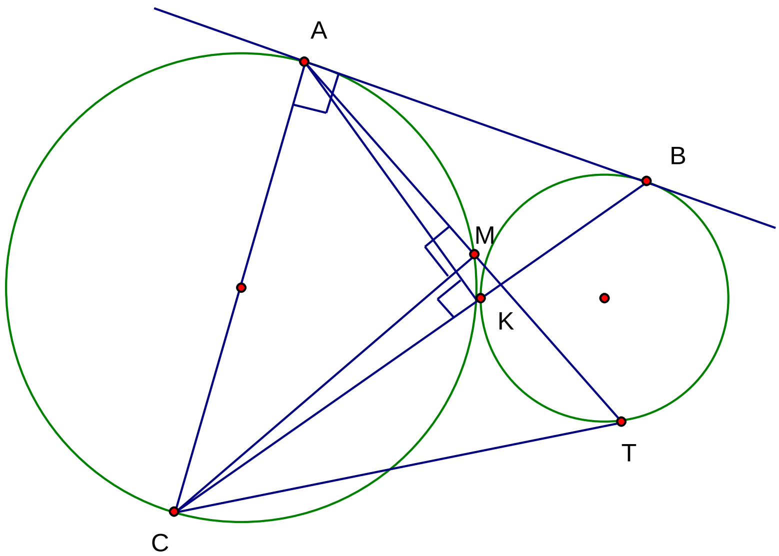
3. Դիցուք ω_1 և ω_2 շրջանագծերն իրար արտաքնապես շոշափում են K կետում: Այդ շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողն ω_1–ը շոշափում է A կետում, իսկ ω_2–ը՝ B կետում: Դիցուք BK ուղիղը ω_1–ը հատում է C կետում, իսկ CT–ն C կետից ω_2–ին տարված շոշափողն է: Ապացուցել, որ AM=MT, որտեղ M–ը AT հատվածի և ω_1-ի հատման կետն է:

Լուծում: Նախ ապացուցենք, որ $\angle AKB = 90^\circ$:



I եղանակ: Դիցուք O_1–ը և O_2-ը ω_1 և ω_2 շրջանագծերի կենտրոններն են, իսկ $\angle AO_1K = 2\alpha$: Քանի, որ $\angle AO_1K + \angle BO_2K = 180^\circ \Rightarrow \angle BKO_2 = \alpha$ և $\angle AKO_1 = 90^\circ - \alpha$, հետևաբար $\angle AKO_1 + \angle BKO_2 = 90^\circ$ որտեղից $\angle AKB = 90^\circ$:

II եղանակ: Դիցուք ω_1 և ω_2 շրջանագծերի K կետում տարված ընդհանուր շոշափողը AB հատվածը հատում է P կետում: Այդ դեպքում AP=PK=PB, հետևաբար $\angle AKB = 90^\circ$:

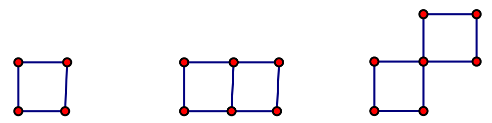


Քանի, որ $\angle AKC = 90^\circ$, հետևաբար AC–ն տրամագիծ է, ուստի $\angle CAB = 90^\circ$: Այդ դեպքում $AC^2 = CK \cdot CB = CT^2$, հետևաբար AC=CT և $\angle AMC = 90^\circ$, որտեղից $AM = TM$:

4. 8×8 չափանի շախմատի տախտակի վանդակներից մի-քանիսում շարել են թագավորներ այնպես, որ յուրաքանչյուր թագավոր հարվածում է ամենաշատը մեկ թագավորի: Պարզել, թե շախմատի տախտակի վրա ամենաշատը քանի՞ թագավոր կա:

*Թագավորը հարվածում է այլ թագավորի, եթե նրանց վանդակներն ունեն ընդհանուր կողմ կամ ընդհանուր գագաթ:

Լուծում: Այն վանդակներում, որտեղ թագավոր կա գրենք 0: Հարևան զրոները գրված են II կամ I տեսքի պատկերներում, որոնք ունեն համապատասխանաբար 6 և 7 զազաթներ, իսկ այն զրոն, որը հարևան չունի գրված է 4 զազաթ ունեցող III պատկերում: (նկար 1)



III II I նկար 1

Ենթադրենք I տեսակի պատկերների քանակը հավասար է x, II տեսակի՝ y, III տեսակի՝ z: Քանի, որ քառակուսու զազաթների քանակը 81 է, հետևաբար $7x+6y+4z\le 81$, իսկ զրոների քանակը հավասար է $2x+2y+z=n$: Այդ դեպքում՝
$81\ge 7x+6y+4z=3(2x+2y+z)+x+z\ge 3n$ (*), որտեղից $n\le 27$: (*) անհավասարությունում հավասարությունը տեղի ունենալու համար անհրաժեշտ է, որ $x=z=0$: Երբ $n=27=2x+2y+z$, ապա $z\ne 0$ քանի, որ, երբ $z=0$, $27=2x+2y+z$ հավասարումը լուծում չունի, հետևաբար $n=27$ դեպքը չի բավարարում: Այսպիսով $n\le 26$: Երբ $n=26$՝ օրինակը՝ նկարում 2-ում:

0		0		0		0	
0		0		0		0	
0	0		0	0		0	0
0	0		0	0		0	0
0	0		0	0		0	0

Նկար 2

12-րդ դասարան

1. Տես 11-1

2. Դիցուք $a>0, b>0, c>0$ և $a+b+c\le 1$: Գտնել $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը:

Լուծում 1: $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c+\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}=a+b+c+\frac{9}{a+b+c}$: Դիտարկենք $f(x)=x+\frac{9}{x}, 0<x\le 1$ ֆունկցիան: Քանի, որ $f'(x)=1-\frac{9}{x^2}<0$, երբ $0<x\le 1$, հետևաբար ֆունկցիան $0<x\le 1$ միջակայքում նվազող է, ուստի $f(x)\ge f(1)=10, 0<x\le 1$:Այսպիսով $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 10$: Հավասարությունը տեղի ունի, երբ $a=b=c=\frac{1}{3}$:

Լուծում 2:

$$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(a+\frac{1}{9a}\right)+\left(b+\frac{1}{9b}\right)+\left(c+\frac{1}{9c}\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{9a}}+2\sqrt{b\cdot\frac{1}{9b}}+$$

$$+2\sqrt{c\cdot\frac{1}{9c}}+\frac{8}{9}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=2+\frac{8}{3\sqrt[3]{abc}}\ge 2+\frac{8}{3\frac{a+b+c}{3}}\ge 2+8=10:$$

Հավասարությունը տեղի ունի, երբ $a=b=c=\frac{1}{3}$:

3. Տես 11-3

4. Տես 11-4

<u>Գնահատում:</u>

Խնդրի լուծման հետ կապ ունեցող ցանկացած դատողություն **– 1 միավոր**

Խնդրի լուծմանը վերաբերվող լուրջ տրամաբանական դատողություն **– 3 կամ 4 միավոր**

Խնդիրը լուծված է, սակայն կա որոշակի թերություն **– 6 միավոր**

Խնդիրն ամբողջությամբ լուծված է **– 7 միավոր**

<u>Ուշադրություն:</u>

11-րդ և 12-րդ դասարանների 3-րդ խնդրի պահանջը սխալ է, բոլորին գնահատել **7 միավոր:**