ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

9-րդ դասարան, խնդիրներն ու լուծումները

(14-15 մարտի 2016թ)

1. Գրատախտակին մեկ շարքով գրված են 66 բնական թվեր: Հայտնի է, որ իրար կողք գրված ցանկացած 7 թվերի գումարը հավասար է 202-ի: Գտնել գրված բոլոր թվերի գումարի ամենամեծ հնարավոր արժեքը: Պատասխանը հիմնավորել:

   Լուծում: Թվերը բաժանենք 7-նյակների: Արդյունքում կստացվի 9 հատ յոթնյակ և ևս 3 հատ թիվ: Նկատենք, որ բոլոր թվերի գումարը կլինի հավասար $9 \cdot 202$ + վերջին երեք թվերի գումարը: Այսինքն գումարը կլինի հնարավորինս մեծ, եթե վերջին երեք թվերը լինեն հնարավորինս մեծ: Նկատենք, որ վերջին յոթ թվերի գումարը հավասար է 202-ի և բոլորն էլ բնական են, հետևաբար վերջին երեք թվերի գումարի ամենամեծ հնարավոր արժեքը $202-4=198$-ն է: Այդ դեպքում բոլոր թվերի գումարը կլինի հավասար $1818+198=2016$:

   Ապացույցն ավարտելու համար ցույց տանք, որ գումարը 2016 լինել կարող է: Այդպիսի օրինակ է թվերի այսպիսի հաջորդականությունը

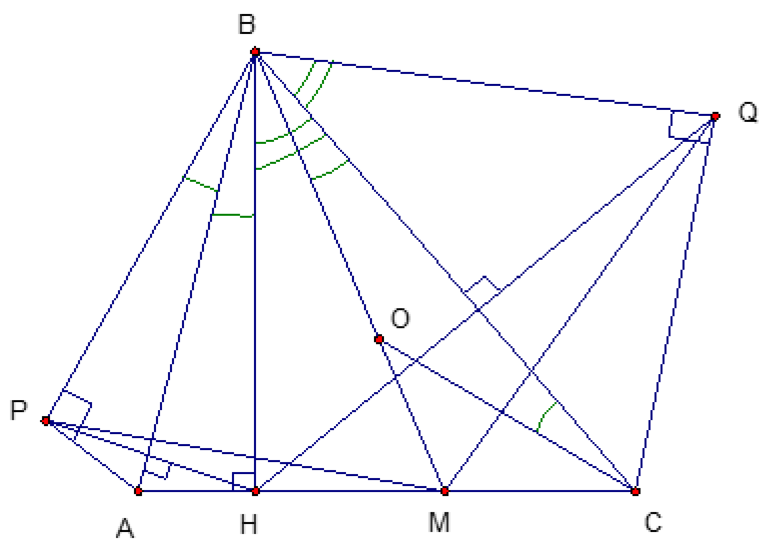
$$196, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 196, 1, 1, \ldots, 196, 1, 1$$

Պատասխան՝ 2016:

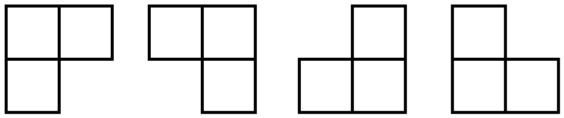
2. Դիցուք BH–ը ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունն է, իսկ O–ն արտագծած շրջանագծի կենտրոնը: Դիցուք P–ն և Q-ն H կետի համաչափ կետերն են համապատասխանաբար BA և BC կողմերի նկատմամբ, իսկ M–ը BO և AC ուղիղների հատման կետն է: Ապացուցել, որ $\angle APM = \angle CQM$:

Լուծում: Նշանակենք $\angle ABH = \alpha$: Այդ դեպքում $\angle BAH = 90^o - \alpha$, ուստի $\angle BOC = 180 - 2\alpha$ և $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$:

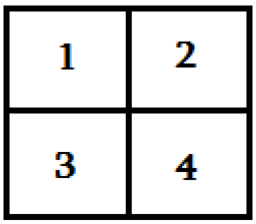
Քանի որ P և Q կետերը H կետի համաչափերն են AB և BC ուղիղների նկատմամբ, հետևաբար $\angle PBA = \angle ABH$ և $\angle HBC = \angle CBQ$, որտեղից էլ հետևում է, որ $\angle PBM = \angle MBQ$: Նկատենք, որ $\triangle BPM = \triangle BMQ$, քանի որ $\angle PBM = \angle MBQ$, $BP = BH = BQ$, իսկ BM-ն ընդհանուր է: Այդտեղից սպացվում է, որ $\angle BPM = \angle BQM$, որտեղից էլ $\angle APM = \angle BPA - \angle BPM = 90 - \angle BQM = \angle MQC$:



3. Խաչիկն ու Վաչիկը թղթի վրա գրեցին երկու ոչ բացասական ամբողջ թվեր՝ x և y: Հրաչիկը փեսնելով այդ թվերը 8×8 չափանի շախմափի փախփակի վանդակներից մի-քանիսը ներկեց կապույփ գույնով (հնարավոր է, որ ոչ մեկն էլ չի ներկել) այնպես, որ ցանկացած 3×3 չափանի քառակուսում կապույփ գույնով ներկած է ճիշփ x հափ վանդակ, իսկ ցանկացած 3 վանդականոց անկյունակում (փես նկարը) կապույփ գույնով ներկած է ճիշփ y հափ վանդակ: Գփնել x-ի և y-ի բոլոր հնարավոր արժեքները:



Լուծում: Վերցնենք որևէ 2×2 քառակուսի: Նրա մեջ անկյունակ հնարավոր է փեղավորել 4 փարբեր եղանակներով:



Համաձայն խնդրի պայմանի $1-2-3$ վանդակներում կա այնքան կապույփ վանդակ, որքան որ $1-2-4$ վանդակներում, այսինքն 3 և 4 վանդակները միևնույն գույնի են: Օգփվելով անկյունակի այլ դիրքերից կսփանանք, որ 1, 2, 3 և 4 վանդակները միևնույն գույնի են, ուսփի $x=0$ կամ $x=9$: Նկափենք, որ երկու դեպքն էլ հնարավոր են, քանի որ մի դեպքում սփացվում է, որ ոչ մի վանդակ ներկած չէ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ բոլոր վանդակներն էլ ներկած են կապույփ գույնով:

Պափասխան՝ $(x,y)=(0,0)$ և $(x,y)=(9,3)$:

4. Ապացուցել, որ ցանկացած երկնիշ բնական թվի հնարավոր է կցագրել որևէ եռանիշ թիվ այնպես, որ ստացված հնգանիշ թիվը հավասար լինի բնական թվի քառակուսու:

Լուծում: Թվային առանցքի վրա նշենք $[10100, 10999]$, $[11100, 11999]$, $[12100, 12999]$, …, $[99100, 99999]$ միջակայքերը: Այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում կա 900 հատ բնական թիվ: Այդ նույն առանցքի վրա հերթով ավելացնենք 100^2, 101^2, …, 316^2 թվերն ու ապացուցենք, որ այդ 899 երկարությամբ հատվածներից յուրաքանչյուրում գոնե մեկ բնական թվի քառակուսի կավելացվի: Ապացուցելու համար բավական է նկատել, որ ցանկացած $100 \leq n < 316$ բնական թվի համար

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \leq 631,$$

այսինքն, երկու հաջորդական բնական թվերի միջև հեռավորությունը փոքր է 900-ից, հետևաբար ամեն մի 900 երկարությամբ ինտերվալում կգտնվի գոնե մեկ բնական թվի քառակուսի:

5. Դիցուք a_1, a_2, …, a_n-ը բոլոր 7-անիշ բնական թվերն են, որոնցից յուրաքանչյուրի գրառման մեջ հանդիպում են 1-ից մինչև 7 բոլոր թվանշանները: Ապացուցել, որ

$$* \ a_1 \ * \ a_2 \ * \ a_3 \ * \ \ldots \ * a_n$$

Լուծում 1: Նկատենք, որ այդպիսի թվերի քանակը 7! հատ է: Նրանցից ամեն մի x թվի զույգ անվանենք $8888888 - x$ թիվը: Նկատենք, որ խնդրի պայմանին բավարարող ամեն թվի համապատասխանող զույգը նույնպես բավարարում է խնդրի պայմաններին: Այսպիսով, a_1, a_2, …, a_n թվերը կարող ենք բաժանել $\frac{7!}{2}$ հատ զույգերի այնպես, որ ամեն զույգի թվերի գումարը հավասար է 8888888: Բոլոր թվերի գումարը հավասար կլինի

$$\frac{7!}{2} \cdot 8888888,$$

որը բաժանվում է 2016-ի, $(2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7)$:

Լուծում 2: Նկատենք, որ այդպիսի թվերի քանակը 7! հատ է: Նրանցից ամեն մի x թվի զույգ անվանենք $8888888 - x$ թիվը: Նկատենք, խնդրի պայմանին բավարարող ամեն թվի համապատասխանող զույգը նույնպես բավարարում է խնդրի պայմաններին: Այսպիսով, a_1, a_2, …, a_n թվերը կարող ենք բաժանել $\frac{7!}{2}$ հատ զույգերի այնպես, որ ամեն զույգի թվերի գումարը հավասար է 8888888: Այդպիսի $\frac{7!}{2}$ զույգերից ընտրենք $\frac{7!}{2} + 1008$ հատն ու այդ բոլոր թվազույգերի թվերն իրար գումարենք: Ստացված գումարից հանենք մնացած $\frac{7!}{2} - 1008$ թվազույգերում եղած թվերը: Արդյունքում կստացվի a_1, a_2, …, a_n թվերի հանրահաշվական գումար, որի արժեքը հավասար է $2016 \cdot 8888888$:

6. $ABCD$ քառանկյունում հայտնի է, որ $AB \parallel CD$, $\angle DBC = 10^o$, $\angle BCD = 130^o$ և $AB = AD$: Ապացուցել, որ $BO = AO + OD$, որտեղ O-ն $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է:

Լուծում 1: Քանի, որ $AB \parallel CD$ և $AB = AD$, հետևաբար $\angle ABD = \angle ADB = \angle BDC = 40^o$:

BA ճառագայթի վրա տեղադրենք $AE = AB = AD$ հատվածը: BDE-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է, քանի որ միջնագիծը հավասար է հանդիպակաց կողմի կեսին: Այսպիսով $\angle BDE = 90^o$, $\angle E = 50^o$: Քանի որ $\angle BCD + \angle E = 180^o$ ապա $BCDE$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, որի կենտրոնը A կետն է: Հետևաբար $\angle CAD = 2\angle DBC = 20^o$: Տանենք BD-ին AM ուղղահայացը: $\angle OAM = 30^o$, ուստի

$$BO = BM + MO = DM + MO = DO + 2OM = OD + OA:$$