# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

## 8-րդ դասարան, խնդիրներն ու լուծումները

(14-15 մարտի 2016թ)

1. Գտնել

$$\left|2013+8n-2016m\right|$$

արտահայտության փոքրագույն արժեքը, որտեղ $m$-ը և $n$-ը բնական թվեր են: Պատասխանը հիմնավորել և բերել $m$-ի և $n$-ի արժեքների համապատասխան օրինակ, երբ արտահայտությունն ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը:

Լուծում 1: Քանի որ 2016-ը բաժանվում է 8-ի, իսկ 2013-ը 8-ի բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 5, ուստի արտահայտությունը կարող ենք ձևափոխել հետևյալ տեսքով.

$$\left|2013+8n-2016m\right| = \left|8\cdot 251+5+8n-8\cdot 252m\right| =$$

$$\left|5+8(251+n-252m)\right|:$$

Ինչպես տեսնում ենք, մոդուլի մեջ գրված արտահայտությունը 8-ի բաժանելիս տալիս է 5 մնացորդ, այսինքն բացարձակ արժեքով ամենափոքր արժեքը, որ կարող է ընդունել 3-ն է $(-3=5-8)$: Մնաց ընտրել $m$ և $n$ թվերի այնպիսի արժեքներ, որ $251+n-252m=-1$, կամ այլ կերպ

$$n=252(m-1):$$

Այս հավասարման լուծման օրինակ է $m=2$, $n=252$:

Լուծում 2: Արտահայտությունը ձևափոխենք հետևյալ կերպ.

$$\left|2013+8n-2016m\right| = \left|8n-2016(m-1)-3\right| =$$

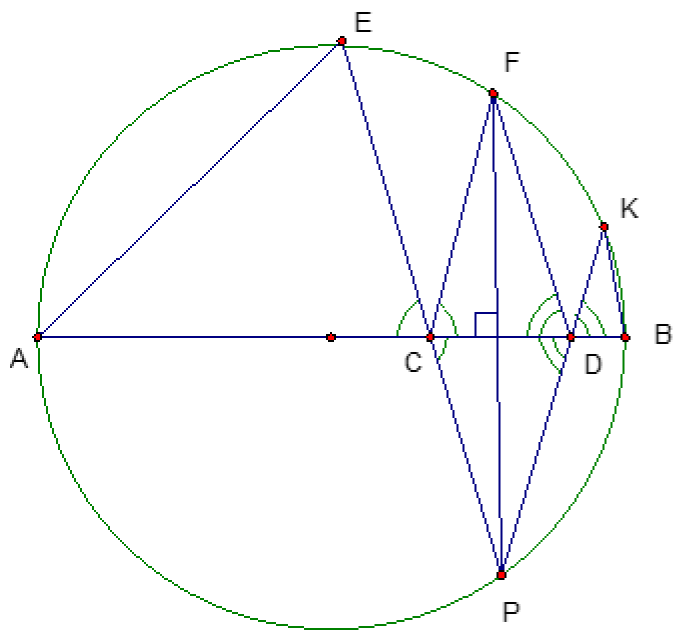
$$\left|3+8(252m-n-252)\right|:$$

Այստեղից հետո շարունակությունը ինչպես առաջին եղանակում:

Պատասխան՝ 3:

2. $AB$ տրամագծով կիսաշրջանագծի վրա վերցրել են $E$, $F$, $K$ կետեր ($A$, $E$, $F$, $K$, $B$ կետերը գտնվում են նշված հերթականությամբ), իսկ $AB$ տրամագծի վրա $C$ և $D$ կետեր ($C$ –ն գտնվում է $AD$ հատվածի վրա) այնպես, որ $\angle ACE = \angle BCF$ և $\angle CDF = \angle BDK$: Ապացուցել, որ $\angle AEC + \angle BKD = 90^o$ :

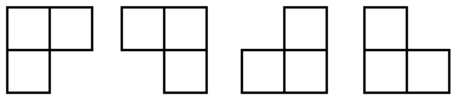
Լուծում: Դիցուք $P$-ն $F$ կետի համաչափն է $AB$ ուղղի նկատմամբ:




Համաչափությունից ելնելով կարող ենք պնդել, որ $AB$-ի նկատմամբ $F$ կետի համաչափ $P$ կետը գտնվում է $AB$ տրամագծով շրջանագծի վրա: Քանի որ $\angle ACE = \angle BCF = \angle BCP$, հետևաբար $A$, $C$ և $P$ կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա: Հանգունորեն $K$, $D$ և $P$ կետերն են գտնվում մեկ ուղղի վրա. Հետևաբար

$$\angle AEC + \angle BKD = \angle AEP + \angle BKP = \frac{\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{BP}}{2} = 90^o :$$

3. Խաչիկն ու Վաչիկը թղթի վրա գրեցին երկու ոչ բացասական ամբողջ թվեր՝ $x$ և $y$: Հրաչիկը փետնելով այդ թվերը $8\times8$ չափանի շախմատի փախփակի վանդակներից մի-քանիսը ներկեց կարմիր գույնով (հնարավոր է, որ ոչ մեկն էլ չի ներկել) այնպես, որ ցանկացած $2\times2$ չափանի քառակուսում կարմիր գույնով ներկած է ճիշտ $x$ հատ վանդակ, իսկ ցանկացած 3 վանդականոց անկյունակում (տես նկարը) կարմիր գույնով ներկած է ճիշտ $y$ հատ վանդակ: Գտնել $x$-ի և $y$-ի բոլոր հնարավոր արժեքները:



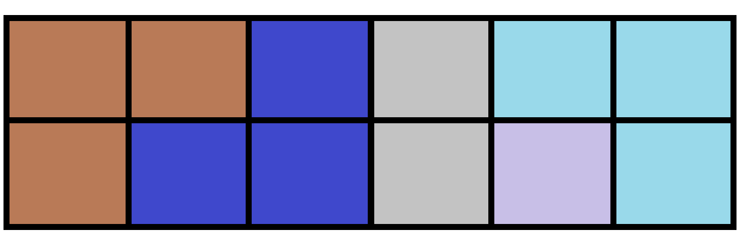
Լուծում 1: Վերցնենք որևէ $2\times2$ քառակուսի: Նրա մեջ անկյունակ հնարավոր է տեղավորել 4 տարբեր եղանակներով:

| | |
|---|---|
| **1** | **2** |
| **3** | **4** |

Համաձայն խնդրի պայմանի $1-2-3$ վանդակներում կա այնքան կարմիր վանդակ, որքան որ $1-2-4$ վանդակներում, այսինքն 3 և 4 վանդակները միևնույն գույնի են: Օգտվելով անկյունակի այլ դիրքերից կստանանք, որ 1, 2, 3 և 4 վանդակները միևնույն գույնի են, ուստի $x=0$ կամ $x=4$: Նկատենք, որ երկու դեպքն էլ հնարավոր են, քանի որ մի դեպքում ստացվում է, որ ոչ մի վանդակ ներկած չէ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ բոլոր վանդակներն էլ ներկած են կարմիր գույնով:

Պատասխան՝ $(x,y)=(0,0)$ և $(x,y)=(4,3)$:

Լուծում 2: Վերցնենք աղյուսակի որևէ $2\times6$ չափանի ուղղանկյուն: Այն հնարավոր է ծածկել 3 հատ 2 քառակուսիներով, կամ 4 հատ անկյունակներով: Նկարում պատկերված է անկյունակներով ծածկման օրինակ, իսկ տարբեր անկյունակները ներկած են տարբեր գույներով:



Քանի որ այն ներկած է 3 քառակուսիներով, ապա այդ վանդակներում կա $3x$ հատ կարմիր վանդակ, իսկ չորս անկյունակներով ծածկելու պայմանից հետևում է, որ այդ ուղղանկյան մեջ կա $4y$ հատ կարմիր վանդակ: Հետևաբար

$$3x=4y:$$

Այսպեղից հեփևում է, որ $x$-ը բաժանվում է 4-ի: Խնդրի պայմանից ունենք, որ $0 \le x \le 4$, այսինքն $x$-ը կարող է լինել միայն 0 կամ 4: Երկու դեպքերին համապափասխանում են չներկած և ամբողջությամբ ներկած աղյուսակները:

4. Քառանիշ բնական թիվը կոչվում է կայուն, եթե հնարավոր է փոխել նրա 1, 2 կամ 3 հատ թվանշաններ այնպես, որ ստացված քառանիշ թիվը բաժանվի 1234-ի: Գտնել այն քառանիշ թվերի քանակը, որոնք կայուն չեն:

Լուծում: Նախ գրենք 1234-ի բաժանվող բոլոր քառանիշ թվերը

1 2 3 4

2 4 6 8

3 7 0 2

4 9 3 6

6 1 7 0

7 4 0 4

8 6 3 8

9 8 7 2

Նախ նկատենք, որ այս բոլոր թվերն էլ կայուն են, քանի որ նրանցից որևէ մեկից փոխելով 1, 2 կամ 3 հատ թվանշան կստանանք մյուսը: Այնուհետև նկատենք, որ եթե որևէ կարգում գրված թվանշանը համընկնում է վերը նշված թվերից որևէ մեկի համապատասխան կարգում գրված թվանշանի հետ, ապա այդ թիվը կլինի կայուն: Այսպիսով, ոչ կայուն թվի առաջին թվանշանը պետք է լինի 5, երկրորդ թվանշանը կարող է լինել 0, 3, 5, երրորդ թվանշանը կարող է լինել 1, 2, 4, 5, 8 կամ 9, իսկ վերջին թվանշանը կարող է լինել 1, 3, 5, 7 կամ 9: Այսպիսով առաջին դիրքի թվանշանը որոշվում է միարժեք, երկրորդ դիրքում կա 3 տարբերակ, երրորդ դիրքում 6 տարբերակ, իսկ վերջին դիրքում՝ 5 տարբերակ: Հետևաբար ոչ կայուն թվերի քանակը կլինի այդ տարբերակների քանակների արտադրյալը, այսինքն

$$1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

հատ:

Պատասխան՝ 90 հատ:

5. Դիցուք $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$-ը բոլոր 7-անիշ բնական թվերն են, որոնցից յուրաքանչյուրի գրառման մեջ հանդիպում են 1-ից մինչև 7 բոլոր թվանշանները: Ապացուցել, որ այդ թվերից յուրաքանչյուրը հնարավոր է գրել մնացած բոլորի հանրահաշվական գումարի փեսքով:

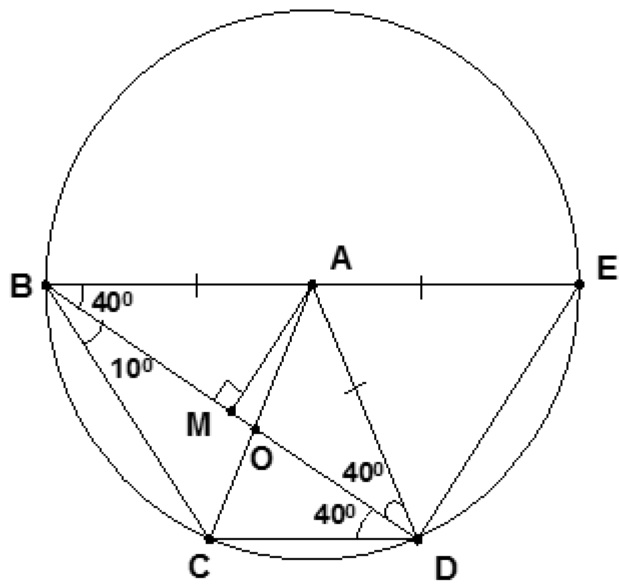
Գումարը կոչվում է հանրահաշվական, եթե նրա բոլոր գումարելիները հանդես են գալիս '+' կամ '-' նշաններով: Օրինակ՝ 21-ը 14-ի, 2-ի և 9-ի հանրահաշվական գումար է, քանի որ $21 = 14 - 2 + 9$:

Լուծում: Նկապենք, որ այդպիսի թվերի քանակը 7! հատ է: Նրանցից ամեն մի $x$ թվի զույգ անվանենք $8888888 - x$ թիվը: Նկատենք, խնդրի պայմանին բավարարող ամեն թվի համապատասխանող զույգը նույնպես բավարարում է խնդրի պայմաններին: Այսպիսով, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ թվերը կարող ենք բաժանել $\frac{7!}{2}$ հատ զույգերի այնպես, որ ամեն զույգի թվերի գումարը հավասար է 8888888: Քանի որ $\frac{7!}{2}$ թիվը զույգ թիվ է, ուսփի այդ զույգերից կեսի մոտ թվերի դիմաց գրելով $'+'$ նշանը, իսկ մյուս կեսի թվերի մոտ դնելով $'-'$ նշանը կստանանք հանրահաշվական գումար, որտեղ մասնակցում են բոլոր $a_i$ թվերը և այդ գումարը հավասար է 0: Այսփեղից էլ սփացվում է խնդրի պնդումը, քանի որ այդ թվերից ցանկացածը տանելով հավասարության մյուս կողմ և անհրաժեշտության դեպքում բոլոր գումարելիների նշանը փոխելով կսփանանք, որ այդ թիվն արտահայտվեց մյուսների հանրահաշվական գումարով:

6. $ABCD$ քառանկյունում $AB \parallel CD$, $\angle DBC = 10^o$, $\angle BCD = 130^o$ և $AB = AD$: Գտնել $CAD$ անկյան մեծությունը:

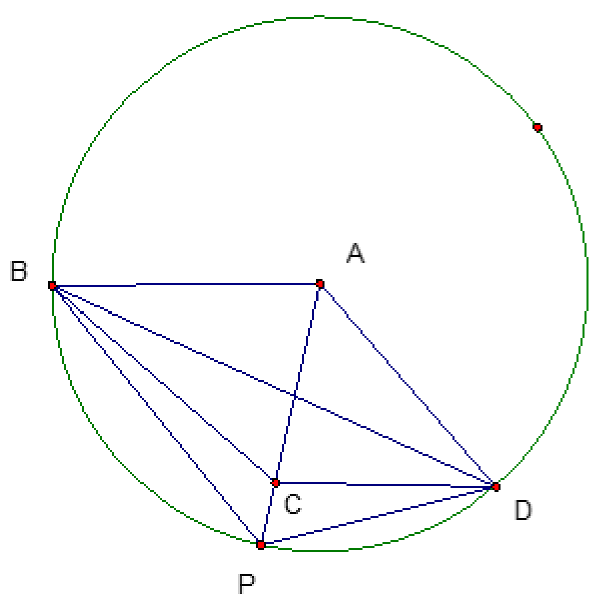
Լուծում 1: Քանի, որ $AB \parallel CD$ և $AB = AD$, հետևաբար $\angle ABD = \angle ADB = \angle BDC = 40^o$:

$BA$ ճառագայթի վրա տեղադրենք $AE = AB = AD$ հատվածը: $BDE$-ն կլինի ուղղանկյուն եռանկյուն, քանի որ միջնագիծը հավասար է հանդիպակաց կողմի կեսին: Այսինքն $\angle BDE = 90^o$, $\angle E = 50^o$: Քանի որ $\angle BCD + \angle E = 180^o$ ապա $BCDE$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, որի կենտրոնը $A$




կետն է: Հետևաբար $\angle CAD = 2\angle DBC = 20^o$

Լուծում 2: Դիցուք $A$ կենտրոնով և $AB$ շառավղով շրջանագիծը $AC$ ուղիղը հատում է $P$ կետում: Քանի որ $AB \parallel CD$ և $AB = AD$ ուստի $\angle ABD = \angle ADB = \angle BDC = 40^o$, որտեղից հետևում է, որ $\angle BAD = 100^o$, ուստի $\angle BPD = (360-100)/2 = 130^o$: Այստեղից հետևում է, որ $P$ և $C$ կետերը համընկնում են: որտեղից էլ ստացվում է, որ $\angle CAD = 2\angle DBC = 20^o$:



Լուծում 3: Քանի որ $AB \parallel CD$ և $AB = AD$ ուստի $\angle ABD = \angle ADB = \angle BDC = 40^o$: Դիցուք $I$-ն $ACD$ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Այդ դեպքում

$$\angle AIC = 180^o - \frac{\angle CAD + \angle DCA}{2} = 130^o$$

հետևաբար $AICB$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, որտեղից էլ $\angle ABI = \angle ACI = \angle DCI = 40^o$, ուստի $\angle CAD = 20^o$: