ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

12-րդ դասարան, խնդիրներն ու լուծումները

(14-15 մարտի 2016թ)

1. Առավելագույնը քանի՞ բնական քառանիշ թիվ է հնարավոր ընտրել, որ նրանք բոլորը լինեն լրիվ քառակուսի, իսկ ցանկացած երկուսը լինեն փոխադարձաբար պարզ:

Բնական թիվը կոչվում է լրիվ քառակուսի, եթե այն հավասար է որևէ բնական թվի քառակուսու, օրինակ՝ $16 = 4^2$, $196 = 14^2$:

Լուծում: Երկու բնական թվերի քառակուսիների փոխադարձաբար պարզ լինելը համարժեք է այդ թվերի փոխադարձաբար պարզ լինելուն: Նկատենք, որ միայն 32-ից 99 միջակայքի բնական թվերի քառակուսիներն են քառանիշ: Հետևաբար խնդիրը համարժեք է հետևյալին. առավելագույնը քանի՞ բնական թիվ է հնարավոր ընտրել 32-ից 99 բնական թվերից այնպես, որ ցանկացած երկուսը լինեն փոխադարձաբար պարզ:

Լուծում 1: Նկատենք, որ 32-ից մինչև 99 միջակայքի ցանկացած բաղադրյալ թիվ ունի 7-ը չգերազանցող պարզ բաժանարար: Հետևաբար, մեր ընտրվող հավաքածուի ցանկացած թիվ պետք է լինի 31-ից մեծ պարզ թիվ (14 հատ են), կամ էլ որպես բաժանարար ունենա 2, 3, 5 կամ 7: Հետևաբար փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակը չի կարող գերազանցել 18-ը: Որպես օրինակ ծառայում են 32, 81, 55, 91 բաղադրյալ թվերը և $37-97$ միջակայքի պարզ թվերը:

Լուծում 2:

Լեմմա 1. Եթե որևէ p պարզ թվի համար p^k բնական թվի քառակուսին քառանիշ է, ապա այն կարող է ընդգրկվել առավելագույն ընտրության մեջ:

Ապացույց. Եթե որևէ ընտրած առավելագույն հավաքածույում բոլոր թվերը p-ի հետ փոխադարձաբար պարզ են, ապա այդ հավաքածույի մեջ ավելացնելով p^k թիվը կստանանք ավելի մեծ հավաքածու: Եկանք հակասության, ուստի կա p-ի հետ ոչ փոխադարձաբար պարզ թիվ: Նկատենք, որ այդպիսի թիվը միակն է: Այդ թիվը հավաքածույում փոխարինենք p^k-ով: Քանի որ 100-ից փոքր պարզ թվերի քանակը սահմանափակ է, ուստի վերևի լեմմայի հիման վրա կարող ենք պնդել հետևյալը.

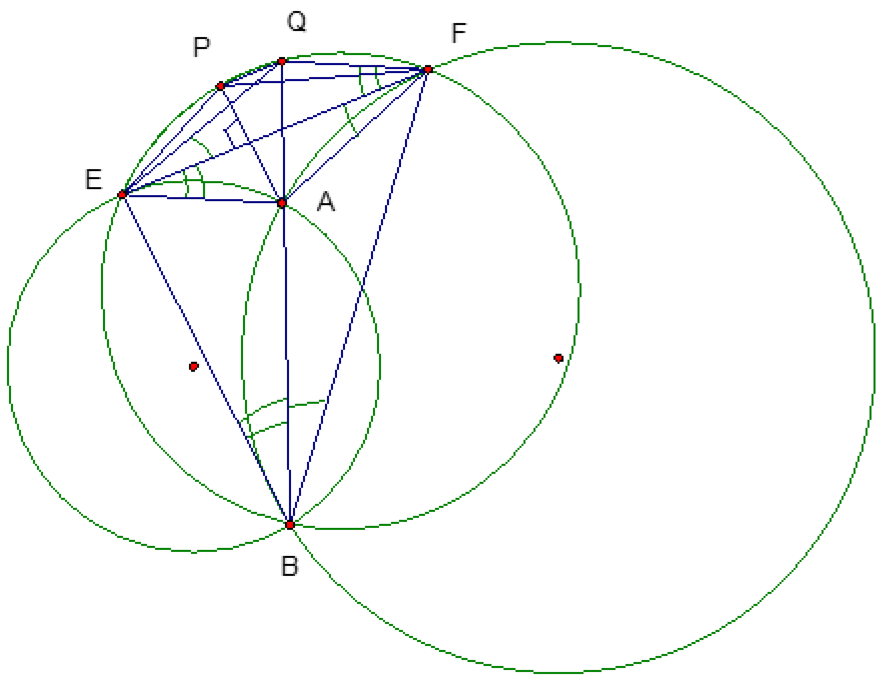
Լեմմա 2. Եթե որևէ p պարզ թվի համար գոյություն ունի p^k տեսքի թիվ, որի քառակուսին քառանիշ է, ապա այդ տեսքի թվերից ցանկացած մեկը պետք է վերցնել:

Այստեղից հետևում է, որ 31-ից մեծ բոլոր պարզ թվերը պետք է ընտրել: Այդ թվերի քանակը 14 հատ է: Նույն պնդման հիման վրա պետք է վերցնել 2^5, 3^4 թվերը: Մնաց ընտրել բաղադրյալ թվեր, որոնք ունեն իրարից տարբեր պարզ բաժանարարներ: Նկատենք, որ նրանց բաժանարարներ կարող են լինել 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 պարզ թվերը: Քանի որ 7-ից մեծ ցանկացած երկուսի արտադրյալը մեծ է 100-ից, ուստի ընտրվող թվերի քանակը չի կարող գերազանցել երկու հատը՝ 5-ը որպես պարզ բաժանարար ունեցող և 7-ը ունեցող: Այդպիսի թվերի օրինակ է 55 և 91: Արդյունքում ստացվեց 18 հատ թիվ:

Պատասխան՝ 18

2. ω_1 և ω_2 շրջանագծերը հատվում են A և B կետերում, իսկ EF–ը նրանց ընդհանուր շոշափողն է ($E \in \omega_1$, $F \in \omega_2$, իսկ A–ն EF–ին ավելի մոտ է գտնվում, քան B-ն): Դիցուք A կետից EF-ին տարված ուղղահայաց ուղիղը և AB ուղիղը EFB եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում են համապատասխանաբար P և Q կետերում (P-ն և Q-ն գտնվում են EF ուղղի միևնույն կողմի վրա) : Ապացուցել, որ $EQ = PF$:

Լուծում: $\angle EBA = \angle FEA = \angle EFQ$ և $\angle ABF = \angle EFA = \angle FEQ$, որտեղից $EQ \parallel AF$ և $QF \parallel AE$: Այստեղից հետևում է, որ $AEQF$-ը զուգահեռագիծ է: Դիցուք K-ն A կետի համաչափն է EF ուղղի նկատմամբ: Այդ դեպքում $\angle EKF + \angle EBF = \angle EAF + \angle EBF = 180^o$, ուստի K-ն գտնվում է EBF եռանկյանն արտագծած շրջանագծի վրա, որտեղից էլ հետևում է, որ K և P կետերը համընկնում են: Այստեղից հետևում է, որ $PQ \parallel EF$, ուստի $EPQF$-ը հավասարասրուն սեղան է, այսինքն $EQ = PF$:



3. Դիցուք դրական թվերի $a_1, a_2, \ldots$ հաջորդականությունն այնպիսին է, որ ցանկացած k բնական թվի համար տեղի ունի

$$a_{k+1} \geq \frac{k a_k}{a_k^2 + k - 1}$$

պայմանը: Ապացուցել, որ ցանկացած $n \geq 2$ բնական թվի համար

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n:$$

Այս խնդիրը հանդիսանում է 2015թ. միջազգային օլիմպիադայի հավակնած խնդիր և մինչև 2016թվականի հուլսի 5-ն նրա լուծումը հրապարակելու իրավունք չկա: Լուծումը կավելացվի 2016թվականի հուլիսի 15-ին:

4. Գրատախտակին սկզբում գրված է 12 հատ թիվ՝ 1 հատ 2016 և 11 հատ 0: Ամեն քայլի թույլատրվում է ընտրել գրատախտակին գրված որևէ երկու թվեր և նրանք փոխարինել իրենց թվաբանական միջինի ամբողջ մասով (օրինակ 2-ն ու 9-ի փոխարեն գրել երկու հատ 5): Հնարավո՞ր է արդյոք այնպես անել, որ որոշակի վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո գրատախտակին գրված բոլոր թվերը լինեն իրար հավասար:

Թվի ամբողջ մաս կոչվում է նրան չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը: Օրինակ $3\frac{1}{7}$-ի ամբողջ մասը հավասար է 3, իսկ 5-ի ամբողջ մասը հավասար է 5:

Լուծում: Դիցուք $a \neq b$ թվերը փոխարինում են իրենց միջին թվաբանականի ամբողջ մասով: Այդ դեպքում գրված թվերի քառակուսիների գումարը փոքրանում է, քանի որ

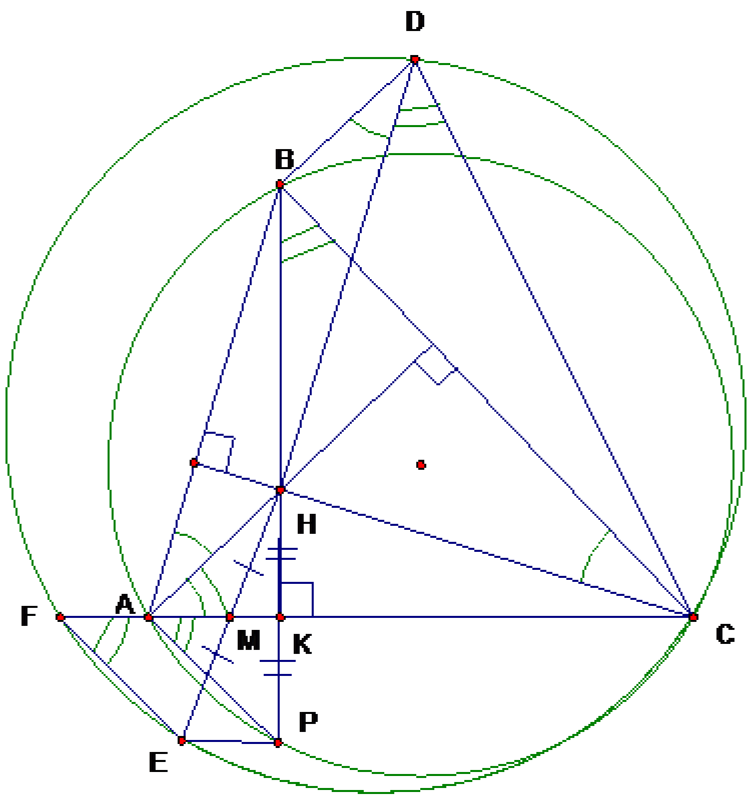
$$a^2 + b^2 > \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2 \cdot \left[\frac{a+b}{2}\right]^2 :$$

Նկատենք, որ քառակուսիների գումարը նվազում է, սակայն մնում է ամբողջ թիվ, այսինքն այն կարող է նվազել վերջավոր քանակությամբ անգամ: Ամեն անգամ ոչ հավասար թվերի հետ կատարելով պահանջվող գործողությունը կստանանք, որ ինչ որ պահի քառակուսիների գումարը էլ չի փոքրանալու: Դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ բոլոր թվերն իրար հավասար դառնան: Այսինքն, հնարավոր է:

5. Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունները հատվում են H կետում: D կետը նշված է այնպես, որ $HABD$-ն զուգահեռագիծ է: Դիցուք DH ուղղի վրա նշված է E կետն այնպես, որ AC ուղիղն անցնում է EH հատվածի միջնակետով: Դիցուք F-ը AC ուղղի և DCE եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հատման երկրորդ կետն է (առաջին կետը C-ն է): Ապացուցել, որ $EF = AH$:

Լուծում: Քանի որ $\angle BAH = \angle BDH = \angle BCH$, ուստի B, H, C և D կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից էլ հետևում է, որ $\angle HDC = \angle HBC$, հետևաբար $\angle EDC = \angle EFC$:

Դիցուք BH ուղիղը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է P, իսկ AC հատվածը՝ K կետում: Այդ դեպքում $\angle HAC = \angle KBC = \angle PBC = \angle PAC$, որտեղից ստացվում է, որ AHP եռանկյան մեջ AK-ն բարձրությունն է և կիսորդ, ուստի $HK = KP$: Ստացվեց, որ $MH = ME$ և $PK = KH$, որտեղից $PE \parallel MK$: Քանի որ $\angle PAK = \angle KAH = \angle KBC = \angle HDC = \angle EFA$, ուստի $EF \parallel AP$: Ստացվեց, որ $EFAP$-ն զուգահեռագիծ է, ուստի $EF = AP = AH$:



6. Դիցուք տրված է m տողանոց և $2n$ սյունականոց ուղղանկյուն աղյուսակ, ընդ որում $n \geq m$: Պարզել, թե առավելագույնը քանի՞ 1×2 չափանի դոմինո է հնարավոր շարել աղյուսակում այնպես, որ հետևյալ բոլոր պայմանները բավարարվեն միաժամանակ.

ա) ամեն դոմինո ծածկի ճիշտ 2 վանդակ,

բ) ամեն վանդակ ծածկված լինի առավելագույնը մեկ դոմինոյով,

գ) չկա 2×2 չափանի քառակուսի, որն ամբողջությամբ ծածկված է 2 դոմինոյով,

դ) աղյուսակի ներքևի տողն ամբողջությամբ ծածկված է n հատ դոմինոյով:

Լուծում: Նախ դոմինոները շարենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկարի ձախ մասում և աղյուսակը ներկենք շախմատաձև: Այդպես շարելուց հետո ազատ վանդակները կբաժանվեն երկու հավասար մասերի: Նկատենք, որ ամեն դոմինո ծածկում է մեկական սև և սպիտակ վանդակներ: Քանի որ դոմինոներով չծածկված ամեն մասում սև և սպիտակ վանդակների քանակները տարբեր են, ուստի ամբողջ տախտակը հնարավոր չէ ծածկել և կմնա ազատ առնվազն m վանդակ: Եթե ազատ վանդակները շարունակենք լցնել հորիզոնական դոմինոներով, ինչպես արդեն դասավորվածներն են, ապա կստացվի $mn-\left[\frac{m}{2}\right]$ հատ դոմինո:

Այժմ ապացուցենք, որ ցանկացած ծածկույթ կարելի է ձևափոխել այնպես, որ նկարի ձախ մասում պատկերված բոլոր հորիզոնական 1×2 ուղղանկյան մեջ լինի դոմինո և ծածկած վանդակների քանակը չլինի ավելի քիչ: Ապացույցը կատարենք ըստ ամենաներքևի ձախ ուղղանկյան, որտեղ դոմինո չկա: Դիցուք D_1 և D_2 ուղղանկյուններում դրված է դոմինո: Եթե նրանց հատման գծի վերևի երկու վանդակներն էլ ազատ են, ապա նրանցում կարող ենք դնել դոմինո, անհրաժեշտության դեպքում դրանից վերև եղած դոմինոն հեռացնելով: Եթե այդ երկու վանդակներից մեկն ազատ է, ապա մյուսում դրված է ուղղաձիգ դոմինո, որն էլ շրջելով կստանանք մեր ուզածը: Մնաց դիտարկել այն դեպքը, երբ երկու վանդակներն էլ զբաղեցված են տարբեր դոմինոներով, սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ հակասում է դասավորվածության պայմաններին: