

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՆԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

11-րդ դասարան, խնդիրներն ու լուծումները

(14-15 մարտի 2016թ)

1. Առավելագույնը քանի՞ բնական քառանիշ թիվ է հնարավոր ընտրել, որ նրանք բոլորը լինեն լրիվ քառակուսի, իսկ ցանկացած երկուսը լինեն փոխադարձաբար պարզ:

Բնական թիվը կոչվում է լրիվ քառակուսի, եթե այն հավասար է որևէ բնական թվի քառակուսու, օրինակ՝ $16 = 4^2$, $196 = 14^2$:

Լուծում: Երկու բնական թվերի քառակուսիների փոխադարձաբար պարզ լինելը համարժեք է այդ թվերի փոխադարձաբար պարզ լինելուն: Նկատենք, որ միայն 32-ից 99 միջակայքի բնական թվերի քառակուսիներն են քառանիշ: Նեղակաբար խնդիրը համարժեք է հետևյալին. առավելագույնը քանի՞ բնական թիվ է հնարավոր ընտրել 32-ից 99 բնական թվերից այնպես, որ ցանկացած երկուսը լինեն փոխադարձաբար պարզ:

Լուծում 1: Նկատենք, որ 32-ից մինչև 99 միջակայքի ցանկացած բաղադրյալ թիվ ունի 7-ը չգերազանցող պարզ բաժանարար: Նեղակաբար, մեր ընտրվող հավաքածուի ցանկացած թիվ պետք է լինի 31-ից մեծ պարզ թիվ (14 հար են), կամ էլ որպես բաժանարար ունենա 2, 3, 5 կամ 7: Նեղակաբար փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակը չի կարող գերազանցել 18-ը: Որպես օրինակ ծառայում են 32, 81, 55, 91 բաղադրյալ թվերը և 37 – 97 միջակայքի պարզ թվերը:

Լուծում 2:

Լեմմա 1. Եթե որևէ p պարզ թվի համար p^k բնական թվի քառակուսին քառանիշ է, ապա այն կարող է ընդգրկվել առավելագույն ընտրության մեջ:

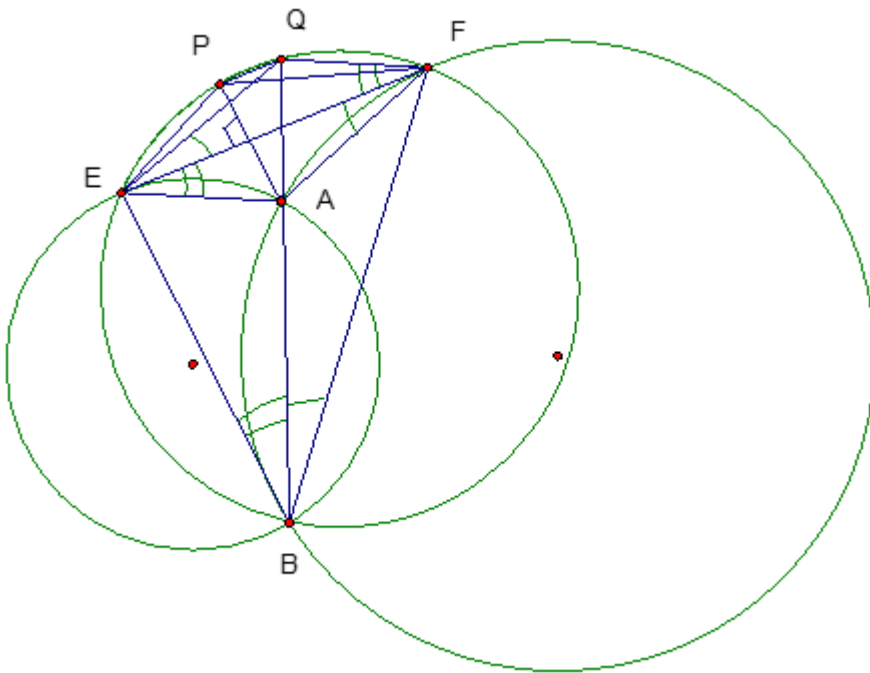
Ապացույց. Եթե որևէ ընտրած առավելագույն հավաքածույում բոլոր թվերը p -ի հետ փոխադարձաբար պարզ են, ապա այդ հավաքածույի մեջ ավելացնելով p^k թիվը կստանանք ավելի մեծ հավաքածու: Եկանք հակասության, ուստի կա p -ի հետ ոչ փոխադարձաբար պարզ թիվ: Նկատենք, որ այդպիսի թիվը միակն է: Այդ թիվը հավաքածույում փոխարինենք p^k -ով: Քանի որ 100-ից փոքր պարզ թվերի քանակը սահմանափակ է, ուստի վերևի լեմմայի հիման վրա կարող ենք պնդել հետևյալը.

Լեմմա 2. Եթե որևէ p պարզ թվի համար գոյություն ունի p^k տեսքի թիվ, որի քառակուսին քառանիշ է, ապա այդ տեսքի թվերից ցանկացած մեկը պետք է վերցնել:

Այսպեղից հետևում է, որ 31-ից մեծ բոլոր պարզ թվերը պետք է ընտրել: Այդ թվերի քանակը 14 հար է: Նույն պնդման հիման վրա պետք է վերցնել 2^5 , 3^4 թվերը: Մնաց ընտրել բաղադրյալ թվեր, որոնք ունեն իրարից փոքր պարզ բաժանարարներ: Նկատենք, որ նրանց բաժանարարներ կարող են լինել 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 պարզ թվերը: Քանի որ 7-ից մեծ ցանկացած երկուսի արտադրյալը մեծ է 100-ից, ուստի ընտրվող թվերի քանակը չի կարող գերազանցել երկու հարը՝ 5-ը որպես պարզ բաժանարար ունեցող և 7-ը ունեցող: Այդպիսի թվերի օրինակ է 55 և 91: Արդյունքում ստացվեց 18 հար թիվ:

2. ω_1 և ω_2 շրջանագծերը հապվում են A և B կետերում, իսկ EF -ը նրանց ընդհանուր շոշափողն է ($E \in \omega_1$, $F \in \omega_2$, իսկ A -ն EF -ին ավելի մոտ է գտնվում, քան B -ն): Դիցուք A կետից EF -ին քարված ուղղահայաց ուղիղը և AB ուղիղը EFB եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հապում են համապատասխանաբար P և Q կետերում (P -ն և Q -ն գտնվում են EF ուղղի միևնույն կողմի վրա) : Ապացուցել, որ $EQ = PF$:

Լուծում: $\angle EBA = \angle FEA = \angle EFQ$ և $\angle ABF = \angle EFA = \angle FEQ$, որպեսզի $EQ \parallel AF$ և $QF \parallel AE$: Այսպեսզի հեղուկ է, որ $AEQF$ -ը զուգահեռագիծ է: Դիցուք K -ն A կետի համաչափն է EF ուղղի նկատմամբ: Այդ դեպքում $\angle EKF + \angle EBF = \angle EAF + \angle EBF = 180^\circ$, ուստի K -ն գտնվում է EBF եռանկյանն արտագծած շրջանագծի վրա, որպեսզի էլ հեղուկ է, որ K և P կետերը համընկնում են: Այսպեսզի հեղուկ է, որ $PQ \parallel EF$, ուստի $EPQF$ -ը հավասարասրուն սեղան է, այսինքն $EQ = PF$:



3. Դիցուք դրական թվերի a_1, a_2, \dots հաջորդականությունն այնպիսին է, որ ցանկացած k բնական թվի համար տեղի ունի

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

պայմանը: Ապացուցել, որ ցանկացած $n \geq 2$ բնական թվի համար

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n:$$

4. a և b ութանիշ բնական թվերը կոչվում են իրար հարազատ, եթե նրանք երկուսն էլ բնական թվի քառակուսի են և նրանց առաջին չորս թվանշաններով կազմված քառանիշ թվերը համընկնում են: Գտնել հարազատ թվազույգերի քանակը:

Լուծում: Նկատենք, որ ութանիշ բնական թիվը կարող է լինել 3163-ից մինչև 9999 միջակայքից որևէ թվի քառակուսի:

Ապացուցենք, որ ամեն բնական թիվ կարող է ունենալ առավելագույնը մեկ հարազատ: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն $a < b < c$ բնական թվերն իրար հարազատ են: Այդ դեպքում

$$c^2 - a^2 = (c - a)(c + a) \geq 4a \geq 4 \cdot 3163 > 10000$$

եկանք հակասության, որ a և c թվերի առաջին չորս թվանշանները համընկնում են:

Նույն հիմքով կարելի է ապացուցել, որ 5000-ից մեծ բնական թվի քառակուսին չի կարող ունենալ հարազատ: Սրացանք, որ 3163-ից 5000 միջակայքի թվերի քառակուսիներն են կարող ունենալ հարազատ: Նկատենք, որ այդ միջակայքի թվերի քառակուսիները կսկսվեն 1000-ից մինչև 2500 միջակայքի բոլոր հնարավոր քառանիշ թվերով: Ներկաբար հարազատ թվերի զույգերի քանակը կլինի

$$5000 - 3163 - (2500 - 1000) = 337:$$

Պատասխան՝ 337:

5. Գրափախարակին սկզբում գրված է 12 հափ թիվ՝ 1 հափ 2016 և 11 հափ 0: Ամեն քայլի թույլատրվում է ընդրել գրափախարակին գրված որևէ երկու թվեր և նրանք փոխարինել իրենց թվաբանական միջինի ամբողջ մասով (օրինակ 2-ն ու 9-ի փոխարեն գրել երկու հափ 5): Ննարավոր է արդյոք այնպես անել, որ որոշակի վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո գրափախարակին գրված բոլոր թվերը լինեն իրար հավասար:

Թվի ամբողջ մաս կոչվում է նրան չզերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը: Օրինակ $3\frac{1}{7}$ -ի ամբողջ մասը հավասար է 3, իսկ 5-ի ամբողջ մասը հավասար է 5:

Լուծում: Դիցուք $a \neq b$ թվերը փոխարինում են իրենց միջին թվաբանականի ամբողջ մասով: Այդ դեպքում գրված թվերի քառակուսիների գումարը փոքրանում է, քանի որ

$$a^2 + b^2 > \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2 \cdot \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 :$$

Նկատենք, որ քառակուսիների գումարը նվազում է, սակայն մնում է ամբողջ թիվ, այսինքն այն կարող է նվազել վերջավոր քանակությամբ անգամ: Ամեն անգամ ոչ հավասար թվերի հետ կարարելով պահանջվող գործողությունը կստանանք, որ ինչ որ պահի քառակուսիների գումարը էլ չի փոքրանալու: Դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ բոլոր թվերն իրար հավասար դառնան: Այսինքն, հնարավոր է:

6. Դիցուք ABC սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունները հատվում են H կետում: D կետը նշված է այնպես, որ $HABD$ -ն զուգահեռագիծ է: Դիցուք DH ուղղի վրա նշված է E կետն այնպես, որ AC ուղիղն անցնում է EH հատվածի միջնակետով: Դիցուք F -ը AC ուղղի և DCE եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հարման երկրորդ կետն է (առաջին կետը C -ն է): Ապացուցել, որ $EF = AH$:

Լուծում: Քանի որ $\angle BAH = \angle BDH = \angle BCH$, ուստի B, H, C և D կետերով անցնում է շրջանագիծ, որտեղից էլ հետևում է, որ $\angle HDC = \angle HBC$, հետևաբար $\angle EDC = \angle EFC$:

Դիցուք BH ուղիղը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծը հատում է P , իսկ AC հատվածը՝ K կետում: Այդ դեպքում $\angle HAC = \angle KBC = \angle PBC = \angle PAC$, որտեղից ստացվում է, որ AHP եռանկյան մեջ AK -ն բարձրությունն է և կիսորդ, ուստի $HK = KP$: Ստացվեց, որ $MH = ME$ և $PK = KH$, որտեղից $PE \parallel MK$: Քանի որ $\angle PAK = \angle KAH = \angle KBC = \angle HDC = \angle EFA$, ուստի $EF \parallel AP$: Ստացվեց, որ $EFAP$ -ն զուգահեռագիծ է, ուստի $EF = AP = AH$:

