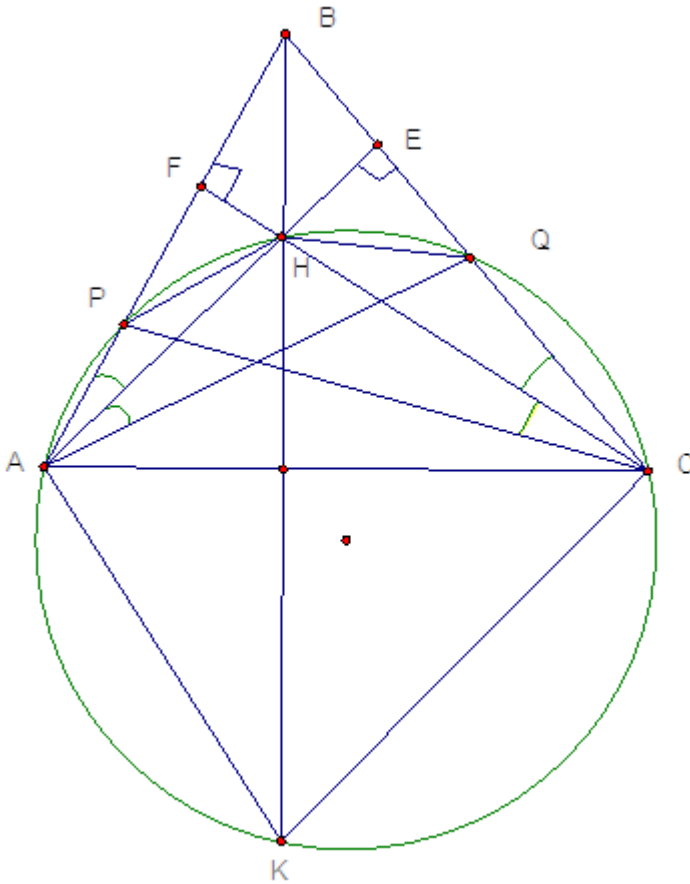




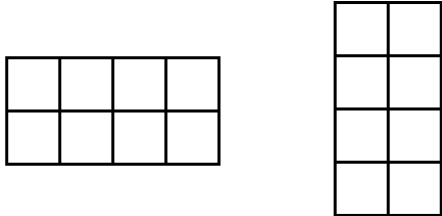
2.  $ABC$  սուրանկյուն եռանկյան  $CF$  և  $AE$  բարձրությունները հափվում են  $H$  կետում: Դիցուք  $P$  և  $Q$  կետերը  $B$  կետի համաչափ կետերն են համապատասխանաբար  $F$  և  $E$  կետերի նկատմամբ ( $P$  և  $Q$  կետերը գրնվում են  $AB$  և  $BC$  հարվածների վրա), իսկ  $K$ -ն  $B$  կետի համաչափն է  $AC$  ուղղի նկատմամբ: Ապացուցել, որ  $K, P, H, Q$  կետերը գրնվում են մի շրջանագծի վրա:

Լուծում:



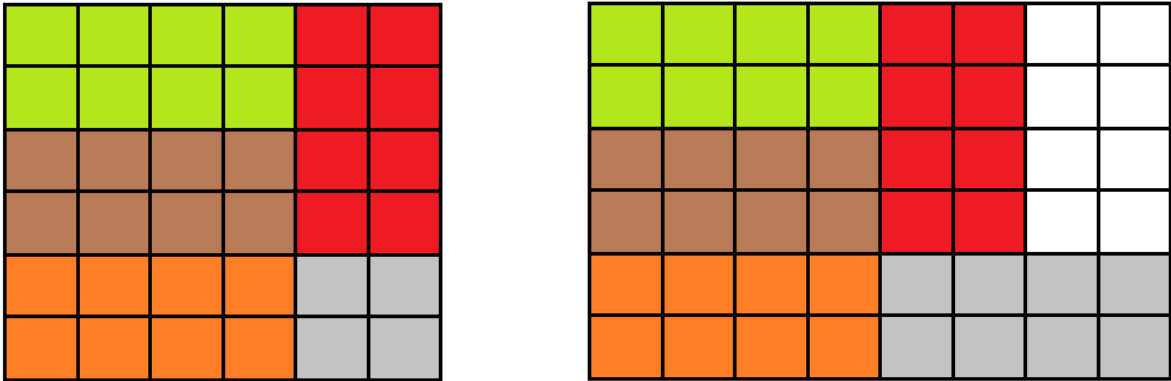
Քանի որ  $AE$ -ն  $ABQ$  եռանկյան բարձրություն է և միջնագիծ, ուրեմն  $\angle BAE = \angle EAQ = 90^\circ - \angle ABC$ : Նանգունորեն  $\angle BCF = \angle FCP = 90^\circ - \angle ABC$ : Սրացվեց, որ  $\angle HAQ = \angle HCQ$ , որպետից էլ հետևում է, որ  $A, H, Q, C$  կետերով անցնում է շրջանագիծ: Նանգունորեն  $A, P, H, C$  կետերով նույնպես անցնում է շրջանագիծ: Քանի որ  $\angle AKC + \angle AHC = \angle ABC + \angle EHF = 180^\circ$ , ուրեմն  $K$  կետը նույնպես գրնվում է այդ շրջանագծի վրա:

3. Խաչիկն ու Վաչիկը թղթի վրա գրեցին երկու ոչ բացասական ամբողջ թվեր՝  $x$  և  $y$ : Նրաչիկը փեսանելով այդ թվերը  $8 \times 8$  չափանի շախմատի փախարակի վանդակներից մի-քանիսը ներկեց նարնջագույն գույնով (հնարավոր է, որ ոչ մեկն էլ չի ներկել) այնպես, որ ցանկացած  $3 \times 3$  չափանի քառակուսում նարնջա- գույն գույնով ներկած է ճիշտ  $x$  հատ վանդակ, իսկ ցանկացած  $2 \times 4$  չափանի ուղղանկյունում (փես նկարը) նարնջագույն գույնով ներկած է ճիշտ  $y$  հատ վանդակ: Գտնել  $x$ -ի և  $y$ -ի բոլոր հնարավոր արժեքները:



Լուծում: Վերցնենք փախարակի ներքևի ձախ  $6 \times 6$  քառակուսին: Այն հնարավոր է ծածկել 4 հատ  $3 \times 3$  քառակուսիներով, այսինքն այդ քառակուսում կա  $4x$  հատ նարնջագույն վանդակ: Նույն քառակուսին ծածկենք 4 հատ ուղղանկյուններով, ինչպես պարկերված է նկարում: Այդ փրոյթում կլինի  $4y$  հատ նարնջագույն վանդակ: Այսինքն, մնացած չորս վանդակներում (ներկած են գորշ գույնով) կլինի  $4x - 4y = 4(x - y)$  հատ նարնջագույն վանդակ: Քանի որ  $4(x - y)$ -ը բաժանվում է 4-ի, ապա այդ չորս գորշ վանդակները կան միաժամանակ նարնջագույն են, կամ ոչ մեկն էլ նարնջագույն չէ: Այժմ վերցնենք  $6 \times 6$  քառակուսին և փեղափոխենք մեկ վանդակով աջ: Կրկնելով նույն դափողությունները կստանանք, որ այդ չորս վանդակի աջ հարևան երկու վանդակները նույնպես այդ չորս վանդակի պես են: Կրկնելով նույն քայլը ևս մեկ անգամ կստանանք  $2 \times 4$  ուղղանկյուն (աջ նկարում գորշ գույնով), որի բոլոր վանդակները ներկած են, կամ ոչ մեկն էլ ներկած չէ: Այսինքն,  $y = 0$  կամ  $y = 8$ : Նկատենք, որ երկու դեպքերն էլ հնարավոր են, երբ ամբողջ փախարակը ներկած է, կամ ոչ մեկն էլ ներկած չէ:

Պատասխան՝  $(x, y) = (0, 0)$  և  $(x, y) = (9, 8)$ :



4. Գտնել բոլոր  $m$  և  $n$  բնական թվերը, որոնք բավարարում են

$$m! + 136 = n^2$$

հավասարմանը:

Լուծում: Նախ նկատենք, որ  $m = 1, 2, 3, 4$  թվերը լուծում չեն, իսկ  $m = 5$ -ը լուծում է: Ապացուցենք, որ  $m \geq 6$  թիվը չի կարող լինել հավասարման լուծում: Եթե  $m \geq 6$ , ապա  $m!$ -ը կբաժանվի 16-ի, այսինքն  $m! + 136$  թիվը կունենա  $16k + 8 = 4(4k + 2)$  տեսքը: Նամաձայն խնդրի պայմանի  $4k + 2$  թիվը պետք է լինի լրիվ քառակուսի, որն անհնար է, քանի որ բնական թվի քառակուսին 4-ի բաժանելիս չի կարող զրոյից 1 մնացորդ:

Պատասխան՝  $(m, n) = (5, 16)$ :

5.  $a$  և  $b$  ութանիշ բնական թվերը կոչվում են իրար հարազատ, եթե նրանք երկուսն էլ բնական թվի քառակուսի են և նրանց առաջին չորս թվանշաններով կազմված քառանիշ թվերը համընկնում են: Գտնել հարազատ թվազույգերի քանակը:

Լուծում: Նկատենք, որ ութանիշ բնական թիվը կարող է լինել 3163-ից մինչև 9999 միջակայքից որևէ թվի քառակուսի:

Ապացուցենք, որ ամեն բնական թիվ կարող է ունենալ առավելագույնը մեկ հարազատ: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն  $a < b < c$  բնական թվերն իրար հարազատ են: Այդ դեպքում

$$c^2 - a^2 = (c - a)(c + a) \geq 4a \geq 4 \cdot 3163 > 10000$$

եկանք հակասության, որ  $a$  և  $c$  թվերի առաջին չորս թվանշանները համընկնում են:

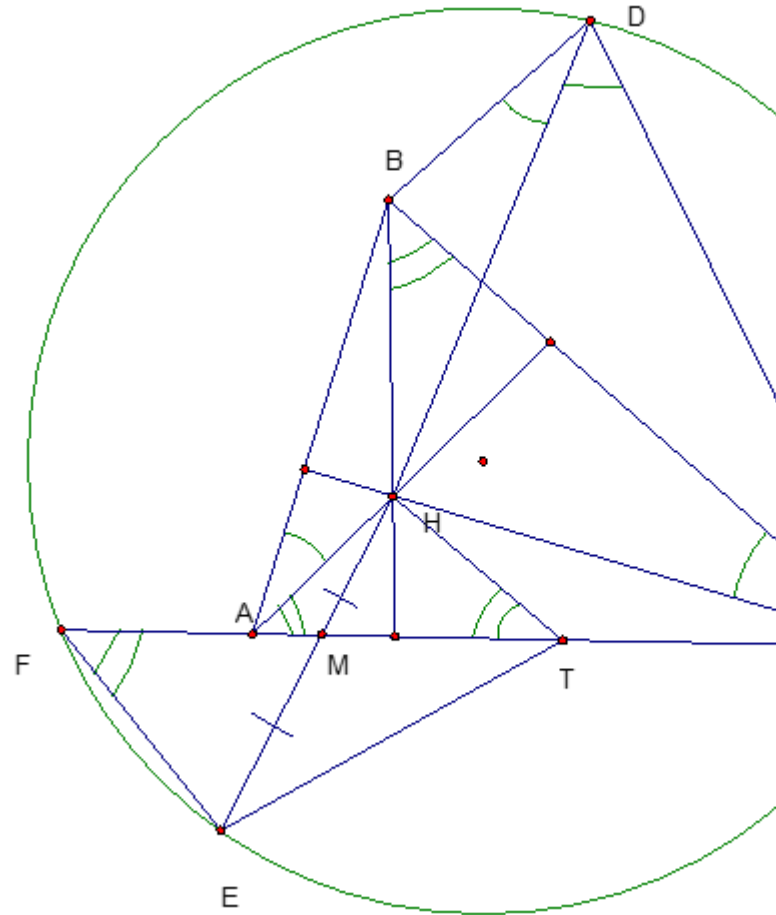
Նույն հիմքով կարելի է ապացուցել, որ 5000-ից մեծ բնական թվի քառակուսին չի կարող ունենալ հարազատ: Սրացանք, որ 3163-ից 5000 միջակայքի թվերի քառակուսիներն են կարող ունենալ հարազատ: Նկատենք, որ այդ միջակայքի թվերի քառակուսիները կսկսվեն 1000-ից մինչև 2500 միջակայքի բոլոր հնարավոր քառանիշ թվերով: Ներկաբար հարազատ թվերի զույգերի քանակը կլինի

$$5000 - 3163 - (2500 - 1000) = 337:$$

Պատասխան՝ 337:

6. Դիցուք  $ABC$  սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունները հատվում են  $H$  կետում:  $D$  կետը նշված է այնպես, որ  $HABD$ -ն զուգահեռագիծ է: Դիցուք  $DH$  ուղղի վրա նշված է  $E$  կետն այնպես, որ  $AC$  ուղիղն անցնում է  $EH$  հատվածի միջնակետով: Դիցուք  $F$ -ը  $AC$  ուղղի և  $DCE$  եռանկյանն արտագծած շրջանագծի հարման երկրորդ կետն է (առաջին կետը  $C$ -ն է): Ապացուցել, որ  $EF = AH$ :

Լուծում: Քանի որ  $\angle BAH = \angle BDH = \angle BCH$  հետևաբար  $B, H, C, D$  կետերով անցնում է շրջանագիծ, որպեսզի էլ հետևում է, որ  $\angle HDC = \angle HBC$ , ուստի  $\angle EDC = \angle EFC$ : Դիցուք  $T$  կետը  $F$  կետի համաչափն է  $M$  կետի նկատմամբ: Այդ դեպքում  $HTEF$  քառանկյունը զուգահեռագիծ է, որպեսզի էլ ստացվում է,



որ  $\angle TFE = \angle HTA = \angle HAT$ , ուստի  $HT = FE = AH$ :