

Լուծումներ

7-րդ դասարան

14 փետրվարի, 2026թ

Խնդիր 1 Դիցուք A, B, C, D, E իրարից տարբեր դրական թվանշաններ են: Հայտնի է, որ $\overline{ABC}$ եռանիշ թիվը հավասար է $\overline{CBA}$ և $\overline{1DE}$ եռանիշ թվերի գումարին: Գտնել $\overline{ABCDE}$ հնգանիշ թվերի քանակը, որոնք բավարարում են վերոնշյալ պայմաններին:

Լուծում. Խնդրի պայմանից ունենք

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 100 + 10D + E$$

որտեղից

$$99(A - C) = 100 + 10D + E$$

Քանի որ վերջին հավասարության աջ մասը մեծ է 99-ից և փոքր է 200 ուրեմն $A - C = 2$: Հետևաբար $\overline{1DE} = 198 \Rightarrow D = 9, E = 8$:

Ունենք $A = C + 2$ և A, B, C կարող են լինել 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 թվանշանները: Այստեղից կստանանք C -ի բոլոր հնարավոր տարբերակներն են՝ 1, 2, 3, 4, 5 իսկ A -ի՝ համապատասխանաբար 3, 4, 5, 6, 7: Յուրքանջուր C -ի արժեքի համար A -ին կհամապատասխանի ճիշտ մեկ արժեք իսկ B -ին՝ հինգ արժեք: Հետևաբար բոլոր տարբերակների քանակը կլինի $5 \cdot 5 = 25$: Նկատենք, որ այդ բոլոր տարբերկաները կբավարարեն խնդրի բոլոր պայմաններին:

Խնդիր 2 Հայտնի է, որ $a, b, c, \frac{a+b}{c}, \frac{a+c}{b}, \frac{b+c}{a}$ թվերը դրական են և ամբողջ: Գտնել

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$$

արտահայտության բոլոր հնարավոր արժեքները:

Լուծում. Նկատենք, որ

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} = \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{a} - 3$$

Նշանակենք $x = \frac{a+b+c}{a}, y = \frac{a+b+c}{b}, z = \frac{a+b+c}{c} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, որտեղ x, y, z դրական ամբողջ թվերն են և անհրաժեշտ է գտնել $x + y + z - 3$:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու համարենք, որ $x \leq y \leq z$:
Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1. $x = 1$:

Կստանանք $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, որը անհնար է:

2. $x = 2$:

Կստանանք $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$: $x \leq y \leq z$ պայմանից հետևում է, որ y -ը կարող է ընդունել միայն 3, 4 արժեքները: Ստուգելով տեսնում ենք $y = 3, z = 6$ և $y = 4, z = 4$ արժեքները բավարարում են և $x + y + z - 3$ ընդունում է 8 և 7 արժեքները: Նկատենք, որ (a, b, c) -ի համապատասխան բավարարող լուծումներ կլինեն $(3, 2, 1)$ և $(2, 1, 1)$:

3. $x \geq 3$:

Կստանանք միակ հնարավոր տարբերակը $x = 3$ է և հետևաբար $y = z = 3$, որտեղից $x + y + z - 3 = 6$ բավարարում է խնդրի պայմաններին և (a, b, c) -ի համապատասխան բավարարող լուծում կլինի $(1, 1, 1)$

Ուրեմն $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$ արտահայտության բոլոր հնարավոր արժեքներն են՝ 6, 7, 8:

Խնդիր 3 Երկնիշ թվերի խումբը կանվանենք բազմազան, եթե 26-ը չգերազանցող ցանկացած դրական ամբողջ թիվ այդ խմբի թվերից գոնե մեկի բաժանարար է: Ամենաքիչը քանի՞ թիվ կարող է պարունակել երկնիշ թվերի բազմազան խումբը:

Լուծում Դիտարկենք հետևյալ 9 թվերը. 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26: Այս թվերից ցանկացած երկուսի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը եռանիշ է, ուստի երկնիշ թվերի խմբում չի կարող լինել այնպիսի թիվ, որը բաժանվի այս թվերից միաժամանակ երկուսին: Այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ պատասխանը առնվազն 9 է: Մյուս կողմից, եթե գտնենք թվերի խումբ, որտեղ լինի 14-ից 26 թվերից յուրաքանչյուրի բազմապատիկ, ապա այդ խումբը կլինի բազմազան, քանի որ 14-ից փոքր յուրաքանչյուր թիվ 14-ից 26 թվերից որևէ մեկի բաժանարար է:

Դիտարկենք հետևյալ 9 թվերից կազմված խումբը. (17, 19, 80, 42, 22, 23, 72, 75, 26): Այս խմբի թվերից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար բաժանվում է վերևում դիտարկված 9 թվերից մեկին: Մնաց ստուգենք արդյոք առկա են 14, 15, 16, 18 թվերի բազմապատիկներ: Դժվար չէ համոզվել, որ 42, 75, 80, 72 թվերը համապատասխանաբար բաժանվում են այդ թվերին, ուստի դիտարկված խումբը բազմազան է:

Պատասխան՝ 9, օրինակ՝ (17, 19, 80, 42, 22, 23, 72, 75, 26)

Խնդիր 4 ABC եռանկյան AB կողմի վրա ընտրված է D կետն այնպես, որ $\angle BCD = 3\angle ACD$, իսկ E կետը ընտրված է AC կողմի վրա այնպես, որ $CE = DE$: Հայտնի է, որ BE և CD ուղիղները հատվում են K կետում և $\angle BKD = 90^\circ$: Գտնել $\angle ACD$ անկյան աստիճանային չափը, եթե $\angle CAD + \angle CDB + \angle CBE = 147^\circ$:

Լուծում. Նշանակենք $\angle ACD = \alpha$: Այդ դեպքում $\angle EDC = \angle ECD = \alpha$, քանի որ $CE = DE$:

Քանի որ $CD \perp BE$, ապա EK -ն եռանկյուն ECD -ի բարձրությունն է, իսկ BK -ն՝ եռանկյուն BCD -ի բարձրությունը: Քանի որ հավասարասրուն եռանկյան բարձրությունը կիսում է հիմքը, ապա ստանում ենք $CK = DK$: Հետևաբար եռանկյուն BCD -ի BK բարձրությունը նույնպես կիսում է հիմքը, ինչից հետևում է, որ եռանկյուն BCD -ն հավասարասրուն է: Ուստի

$$\angle BDC = \angle BCD.$$

Խնդրի առաջին պայմանից ունենք $\angle BCD = 3\alpha$, հետևաբար $\angle BDC = 3\alpha$: Դիտարկելով եռանկյուն ACD -ն՝ ստանում ենք

$$\angle CAD = \angle CDB - \angle ACD = 2\alpha.$$

Մյուս կողմից

$$\angle CDB + \angle CBE = 3\alpha + (90^\circ - 3\alpha) = 90^\circ.$$

Հետևաբար

$$\angle CAD + \angle CDB + \angle CBE = 2\alpha + 90^\circ.$$

Քանի որ խնդրի պայմաններից ունենք

$$2\alpha + 90^\circ = 147^\circ,$$

ստանում ենք

$$\alpha = 28.5^\circ.$$

