Լուծումներ

7-րդ դասարան

15 փետրվարի, 2025թ

Խնդիր 1 Գտնել այն բոլոր քառանիշ թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին. ավելանցելով զրո թվանաշանը քառանիշ թվի ցանկացած դիրքում (հնարավոր է ավելացնել նաև թվի սկզբից, որից հետո թիվը չի փոխվի), ստացված թիվը կբաժանվի 7-ի։

Լուծում. Դիցուք $\overline{abcd}$ քառանիշ թիվը բավարարում է խնդրի պայմանին։ Հետևաբար

$$\begin{aligned}
\overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\
\overline{a0bcd} &= 10000a + 100b + 10c + d \\
\overline{ab0cd} &= 10000a + 1000b + 10c + d \\
\overline{abc0d} &= 10000a + 1000b + 100c + d \\
\overline{abcd0} &= 10000a + 1000b + 100c + 10d
\end{aligned}$$

թվերից յուրքանչյուրը բաժանվում է 7-ի։ Սկսած երկրորդ տողից յուրքանչյուր տողի թվից հանենք իր նախորդ տողի թիվը և արդյունքը կբաժանվի 7-ի։ Կստացվի $9000a, 900b, 90c, 9d$ թվերից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 7-ի, որտեղից a, b, c, d թվանշաններից յուրաքանչյուրը բաժանվում է 7-ի։ Քանի որ a-ն չի կարող զրո լինել հետևաբար $a = 7$, իսկ b, c, d թվանշաններից յուրաքանչյուրը կարող է լինել 0 կամ 7։ Մենակ յոթերից և զրոներից կազմված թիվը բաժանվում է յոթի վրա հետևաբար հետևյալ բոլոր տարբերակները բավարարում են խնդրի պայմանին. $7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707, 7770, 7777$։

Խնդիր 2 Հայտնի է, որ n բնական թիվն ունի m հատ իրարից տարբեր բաժանարար (ներառյալ 1-ը և n-ը)։ Ապացուցել, որ այդ բոլոր բաժանարարների արտադրյալի քառակուսին հավասար է n^m։

Լուծում. Վերցնենք n-ի որևէ d բաժանարար և դիտարկենք $\frac{n}{d}$ թիվը։ Պարզ է, որ այն նույնպես հանդիսանում է n-ի բաժանարար, քանի որ այն ամբողջ թիվ է և $n = d \cdot \frac{n}{d}$։ Այժմ n-ի բոլոր բաժանարարները գրենք մեկ տողով աճման կարգով՝ $1, ..., n$, որի ներքևի տողում գրենք նույն թվերը, սակայն արդեն նվազման կարգով՝ $n, ..., 1$։ Պարզ է, որ առաջին տողի ցանկացած d թվի ներքևում գրված է $\frac{n}{d}$ թիվը։ Բոլոր բաժանարարների արտադրյալի քառակուսին մի կողմից հավասար է այդ երկու տողերի արտադրյալին, մյուս կողմից՝ այդ m հատ սյուների արտադրյալին, ընդ որում, սյուներից յուրաքանչյուրում գրված երկու թվերի արտադրյալը n է, այսինքն բոլորի արտադրյալը n^m է։

Խնդիր 3 Հնարավո՞ր է արդյոք 9×9 տախտակի յուրաքանչյուր վանդակում գրել 1 կամ 2, այնպես որ ցանկցած սյունում գրված թվերի գումարը բաժանվի 5-ի, իսկ ցանկցած տողում գրված թվերի գումարը՝ 7-ի:

Լուծում 1. Յուրքանչյուր տողում թվերի գումարը կլինի $[9, 18]$ միջակայքից: Հետևաբար այն պետք է լինի 14: Տախտակի բոլոր թվերի գումարը կլինի $14 * 9$: Բայց քանի որ $14 * 5$ չի բաժանվում 5-ի, ուրեմն այդպիսի դասավորություն գոյություն չունի:

Լուծում 2. Վերցնենք ցանկացած սյուն և նրանում գտնվող 1-երի քանակը նշանակաենք a, իսկ 2-երի քանակը՝ b: Ըստ խնդրի պայմանի $a+2b \vdots 5$ և $a+b = 9$,որտեղից $b + 4 \vdots 5$,հետևաբար $b = 1$ կամ $b = 6$:

Նյուն եղանակով վերցնենք ցանկացած տող և նրանում գտնվող 1-երի քանակը նշանակաենք c, իսկ 2-երի քանակը՝ d: Ըստ խնդրի պայմանի $c+2d \vdots 7$ և $c+d = 9$,որտեղից $d + 2 \vdots 7$, հետևաբար $d = 5$:

Այն սյուների քանակը որոնք պարունակում են ճիշտ 1 հատ 2 նշանակենք x, հետևաբար 6 հատ 2 պարունակող սյուների քանակը կլինի $9 - x$:

Հաշվենք տախտակում գտնվող 2-երի քանակը մի կողմից տողերով մյուս կողմից սյուներով և կստանանք

$$x + (9 - x)6 = 9 * 5$$

որտեղից $5x = 9$, ինչը հակասություն է: Հետևաբար 9×9 տախտակը հնարավոր չէ խնդրի պայմաններով լրացնել:

Խնդիր 4 ABC եռանկյան BM միջնագծի վրա վերցրել են K կետ, այնպես որ $\angle AKM = \angle MBC$: P-ն A կետից BM ուղղին տարված ուղղահայացի հիմքն է (M-ը գտնվում է P-ի և B-ի միջև): Ապացուցել, որ $BK = 2PM$:

Լուծում. BM միջնագծի շարունակության վրա վերցնենք T կետ այնպես, որ $BM = MT$: Քանի, որ $BM = MT, AM = MC$ և $\angle AMT = \angle BMC$ ապա $\triangle AMT = \triangle BMC$, որտեղից $\angle ATM = \angle MBC = \angle AKT$,հետևաբար $AK = AT$, որտեղից $TP = PK$: Դիցուք $BK = a, KM = b$: Քանի որ $TK = BT - BK = 2(a+b) - a = a + 2b$, հետևաբար $PM = KP - KM = TK/2 - KM = a/2 + b - b = a/2 = BK/2$, որտեղից $BK = 2PM$: