

Խնդիր 4 Դիցուք 10×10 տախտակի մեջ տեղադրված են k հատ 1×4 քառա-դոմինոներ այնպես, որ յուրաքանչյուր քառա-դոմինո ծածկում է տախտակի ճիշտ չորս վանդակ և յուրաքանչյուր վանդակ ծածկված է ամենաշատը մեկ քառա-դոմինոյով: Հայտնի է, որ ցանկացած երկու վանդակ որոնք ծածկված են իրարից տարբեր երկու քառա-դոմինոյով չունեն ընդհանուր կետ (ոչ ընդհանուր կող, ոչ ընդհանուր գագաթ): Գտնել k -ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում. Բաժանենք 10×10 տախտակը 2×2 չափերի քառակուսիների:

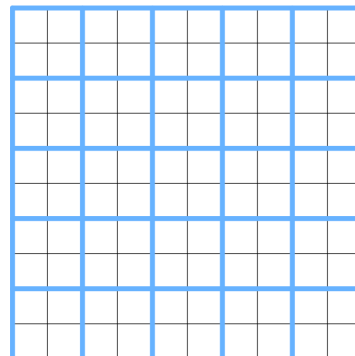
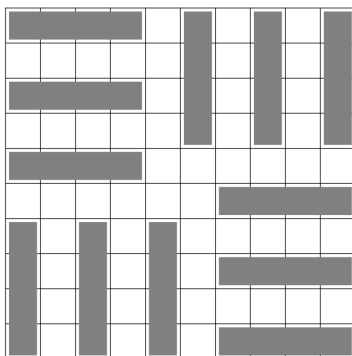
Նկատենք, որ յուրաքանչյուր 2×2 քառակուսու մեջ հնարավոր է ծածկել առավելագույնը 2 միավոր քառակուսի, քանի որ հակառակ դեպքում անհրաժեշտ կլիներ օգտագործել առնվազն երկու տարբեր մասեր, որոնք այդ դեպքում ընդհանուր կետ կունենային: Քանի որ կան 25 հատ 2×2 քառակուսիներ, մասերը կարող են ծածկել առավելագույնը

$$25 \cdot 2 = 50$$

միավոր քառակուսի, և հետևաբար մասերի քանակը կարող է լինել առավելագույնը

$$\left\lfloor \frac{50}{4} \right\rfloor = 12$$

Օրինակ 12-ի դեպքում տեսեք հետևյալ նկարում:



Խնդիր 5 Դիցուք $k > 0$ ամբողջ թիվ է: Տրված են մեկից մեծ $n_1, n_2, \dots, n_k$ իրարից տարբեր k հատ ամբողջ թվերը այնպես, որ

$$n_1! + n_2! + \dots + n_k! = a^{n_1}$$

որտեղ a -ն ինչ-որ ամբողջ թիվ է: Ապացուցել, որ $n_1, n_2, \dots, n_k$ թվերից գոնե մեկը պարզ է:

Լուծում. Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, $n_1! + n_2! + \dots + n_k! = a^{n_1}$, որտեղ t -ն ինչ որ թիվ է $1 \leq t \leq k$ և պետք է ցույց տալ, որ $n_1, n_2, \dots, n_k$ թվերից գոնե մեկը պարզ է: Ենթադրենք հակառակը և $n_1, n_2, \dots, n_k$ թվերից ոչ մեկ պարզ չէ:

Ունենք

$$n_1! \left(1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} \right) = a^{n_1}$$

Ցույց տանք, որ գոյություն ունի p պարզ թիվ այնպես, որ $n_1! \cdot p$ և $1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!}$ թիվը չի բաժանվում p -ի: Եթե $k = 1$, ապա $p = 2$ բավարարում է: Մնաց $k > 1$ դեպքը: Եթե $n_1 + 1$ թիվը պարզ չէ, ապա p -ն վերցնենք $n_1 + 1$ ցանկացած պարզ բաժանարար, որը կբավարարի: Հակառակ դեպքում $n_2 > n_1 + 1$, $n_1 + 2$ -ը պարզ չէ և կստանանք $\frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} \cdot n_1 + 2$: Այս դեպքում p -ն վերցնենք $n_1 + 2$ -ի ինչ-որ պարզ բաժանարար:

Դիցուք x -ը այնպիսի թիվ է, որ $p^x > n_1$: Հետևաբար $n_1! \left(1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} \right)$ թվի մեջ p -ի աստիճանը կլինի նույնը ինչ $n_1!$ մեջ, որը հավասար է

$$\left[\frac{n_1}{p} \right] + \left[\frac{n_1}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n_1}{p^x} \right] \leq \frac{n_1}{2} + \frac{n_1}{2^2} + \dots + \frac{n_1}{2^x} = n_1 - \frac{n_1}{2^x} < n_1$$

Ստացանք, որ $n_1! \left(1 + \frac{n_2!}{n_1!} + \dots + \frac{n_k!}{n_1!} \right)$ թվի մեջ p -ի աստիճանը խիստ փոքր է n_1 -ից և մեզ է զրոյից: Հետևաբար a -ն պետք է բաժանվի p , բայց այդ դեպքում a^{n_1} -ի մեջ p -ի աստիճանը կլինի առնվազն n_1 ինչը հակասություն է: Ուրեմն մեր ենթադրությունը սխալ է և $n_2 = n_1 + 1$ -ը պարզ թիվ է:

Խնդիր 6 Տրված են a, b, c դրական իրական թվերը: Ապացուցել, որ

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right)^3 + \left(\frac{b^2 + c^2}{b + c}\right)^3 + \left(\frac{c^2 + a^2}{c + a}\right)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Լուծում. Ունենք

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right)^3 + \left(\frac{b^2 + c^2}{b + c}\right)^3 + \left(\frac{c^2 + a^2}{c + a}\right)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = \\ & \sum_{cyc} \left[\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right)^3 - \frac{a^3 + b^3}{2} \right] = \sum_{cyc} \frac{2(a^2 + b^2)^3 - (a + b)^3(a^3 + b^3)}{2(a + b)^3} = \\ & \sum_{cyc} \frac{2a^6 + 6a^4b^2 + 6a^2b^4 + 2b^6 - a^6 - 3a^5b - 3a^4b^2 - a^3b^3 - b^6 - 3ab^5 - 3a^2b^4 - a^3b^3}{2(a + b)^3} = \\ & \sum_{cyc} \frac{a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 - 3a^5b - 2a^3b^3 - 3ab^5}{2(a + b)^3} = \\ & \sum_{cyc} \frac{(a^3 - b^3)^2 + 3ab(a^3b + ab^3 - a^4 - b^4)}{2(a + b)^3} = \\ & \sum_{cyc} \frac{(a^3 - b^3)^2 - 3ab(a - b)(a^3 - b^3)}{2(a + b)^3} = \\ & \sum_{cyc} \frac{(a - b)(a^3 - b^3)(a^2 + ab + b^2 - 3ab)}{2(a + b)^3} = \\ & \sum_{cyc} \frac{(a^2 + ab + b^2)(a - b)^4}{2(a + b)^3} \geq 0 \end{aligned}$$