ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՕԼԻՄՊԻԱԴԱ

9-րդ դասարան

Երկրորդ օր (16 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 4 Դիցուք $n > 1$ բնական թիվ է, և $a_1, a_2, ..., a_n$ դրական թվերը բավարարում են $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = 4a_1a_2...a_n$ պայմանին: Ապացուցել, որ

$$a_1a_2...a_{n-1} \geq a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

Լուծում. a_1-ից a_n գումարի մեջ խմբավորենք առաջին $n-1$ գումարելիները և օգտվենք $(x+y)^2 \geq 4xy$ պարզ անհավասարությունից.

$$4a_1a_2...a_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = ((a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) + a_n)^2 \geq 4(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})a_n \Rightarrow$$

$$a_1a_2...a_{n-1} \geq a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

Խնդիր 5 Ամբողջ թվերից կազմված M բազմության համար հայտնի է, որ M-ի ցանկացած երեք տարրից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց գումարը 2-ի աստիճան է: Գտնել M բազմության տարրերի քանակի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում. Թվերի զույգը, որոնց գումարը 2-ի աստիճան է, անվանենք լավ զույգ: Երկու բացասական թվեր չեն կարող կազմել լավ զույգ, ուստի պարզ է, որ M բազմության մեջ բացասական թվերը առավելագույնը 2 հատ են:

Այժմ ժամանակավորապես մոռանանք բացասական թվերի մասին և ապացուցենք, որ դրական թվերը առավելագույնը 4 հատ են: Դիտարկենք բազմության մեծագույն թիվը՝ n-ը: Ապացուցենք, որ այն կարող է լինել առավելագույնը մեկ լավ զույգի մեջ (խոսքը գնում է դրականների մասին): Ենթադրենք այն երկու լավ զույգի մեջ է: Դիցուք $m < k$ և $n+m$ և $n+k$ թվերը երկուսի աստիճաններ են: Այդ դեպքում $n+k \geq 2(n+m)$, ուստի $k \geq n+2m > n$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ n-ը մեծագույնն էր: Նկատենք, որ այստեղից հետևում է նաև, որ ցանկացած m, n, k դրական թվերի եռյակի համար $(m,n),(m,k),(k,n)$ զույգերը միաժամանակ չեն կարող լավը լինել:

Ենթադրենք M-ն ունի 4-ից ավել դրական տարրեր՝ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ընդ որում a_5-ը մեծագույնն է: Քանի որ a_5-ը լավ զույգ է կազմում մյուս չորս թվերից առավելագույնը մեկի հետ, ապա առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ այն լավ զույգ չի կազմում $a_1 < a_2 < a_3$ թվերից ոչ մեկի հետ: Քանի որ a_3-ը լավ զույգ չի կազմում a_1 և a_2 թվերից գոնե մեկի հետ (օրինակ a_1-ի), ապա վերցնելով (a_1, a_3, a_5) եռյակը, կտեսնենք որ լավ զույգ չկա, ինչը հակասում է խնդրին: Այսպիսով M-ի դրական տարրերի քանակը 5-ից քիչ է:

Մնաց ցույց տալ, որ գոյություն ունի $4+2=6$ տարրանոց այդպիսի բազմություն: Դրա համար հերիք է բերել ընդամենը մեկ օրինակ. $M = -1, 3, 5, -5, 7, 9$: (Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ այս օրինակը բավարարում է, քանի որ $(-1, 3, 5)$ եռյակի ցանկացած զույգ լավն է, ինչպես նաև $(-5, 7, 9)$ եռյակի ցանկացած զույգ լավն է: M-ից ընտրելով որևէ երեք թիվ, դրանցից գոնե երկուսը կլինեն վերոնշյալ երկու եռյակներից մեկի մեջ, ուստի կբավարարեն խնդրի պայմանին):

Խնդիր 6 $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյունում $\angle BAC = 2\angle BCA$, $\angle BCA + \angle CAD = 90°$ և $BC = BD$: Գտնել ADB անկյան աստիճանային չափը:

Լուծում. CA ճառագայթի վրա վերցնենք այնպիսի E կետ, որ $BC = BE$: Նշանակենք $\angle BCA = \alpha$: $BC = BE \Rightarrow \angle BEA = \alpha$: Քանի որ $\angle BAC$-ն $\triangle AEB$-ի համար արտաքին անկյուն է, ուստի $\angle EBA = 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow AB = AE$:

$\angle EAD = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$, և $\angle BAD = 2\alpha + 90° - \alpha = 90° + \alpha$, այսինքն $\angle EAD = \angle BAD$: Համաձայն եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի՝ $\triangle EAD = \triangle BAD \Rightarrow ED = BD$, որտեղից $\triangle EBD$-ն հավասարակողմ է, և $\angle ADE = \angle ADB = 30°$: