

Լուծումներ

8-րդ դասարան

Երկրորդ օր (15 փետրվարի, 2026թ)

Խնդիր 4 Կասենք $k > 0$ ամբողջ թիվը լավն է, եթե գոյություն ունի $n > 0$ ամբողջ թիվ այնպես, որ $n^2 + 1$ և $2n$ թվերի վերջին k հատ թվանշանները և նրանց հերթականությունը նույն են, բայց վերջից $(k + 1)$ -րդ թվանշանները իրարից տարբեր են: Գտնել բոլոր լավ թվերը:

Լուծում. Երկու թվերի վերջին k թվանշանների համընկնելու պայմանը համարժեք է այդ երկու թվերի տարբերությունը ճիշտ k գրոյով վերջանալուն: Նկատենք, որ

$$n^2 + 1 - 2n = (n - 1)^2$$

1. k -ն գույգ թիվ է:

Դիտարկենք $n = 10^{k/2} + 1$ թիվը: Այդ դեպքում $n - 1$ թիվը վերջանում է $k/2$ գրոյով, իսկ վերջից $(k/2 + 1)$ -րդ թվանշանը հավասար է 1: Հետևաբար $(n - 1)^2$ թիվը վերջանում է k գրոյով, իսկ վերջից $(k + 1)$ -րդ թվանշանը հավասար չէ 0: Հետևաբար k -ն լավն է:

2. k -ն կենտ թիվ է:

Ենթադրենք k -ն լավն է: Հետևաբար $(n - 1)^2$ վերջանում է ճիշտ k գրոյով: Քանի որ թվի քառակուսին կարող է վերջանալ գույգ հատ գրոներով ստանում ենք հակասություն

Հետևաբար լավ թվերն են բոլոր գույգ դրական ամբողջ թվերը:

Խնդիր 5 Դիցուք 10×10 տախտակի մեջ տեղադրված են k հատ 1×4 քառա-դոմինոներ այնպես, որ յուրաքանչյուր քառա-դոմինո ծածկում է տախտակի ճիշտ չորս վանդակ և յուրաքանչյուր վանդակ ծածկված է ամենաշատը մեկ քառա-դոմինոյով: Հայտնի է, որ ցանկացած երկու վանդակ որոնք ծածկված են իրարից տարբեր երկու քառա-դոմինոյով չունեն ընդհանուր կետ (ոչ ընդհանուր կող, ոչ ընդհանուր գագաթ): Գտնել k -ի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում. Բաժանենք 10×10 տախտակը 2×2 չափերի քառակուսիների:

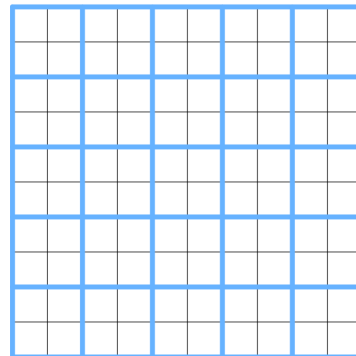
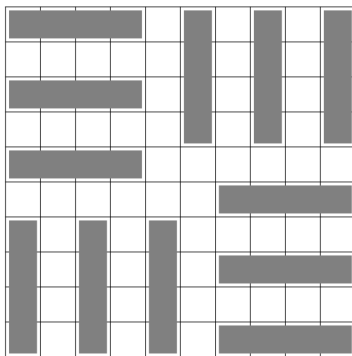
Նկատենք, որ յուրաքանչյուր 2×2 քառակուսու մեջ հնարավոր է ծածկել առավելագույնը 2 միավոր քառակուսի, քանի որ հակառակ դեպքում անհրաժեշտ կլիներ օգտագործել առնվազն երկու տարբեր մասեր, որոնք այդ դեպքում ընդհանուր կետ կունենային: Քանի որ կան 25 հատ 2×2 քառակուսիներ, մասերը կարող են ծածկել առավելագույնը

$$25 \cdot 2 = 50$$

միավոր քառակուսի, և հետևաբար մասերի քանակը կարող է լինել առավելագույնը

$$\left\lfloor \frac{50}{4} \right\rfloor = 12$$

Օրինակ 12-ի դեպքում տեսեք հետևյալ նկարում:



Խնդիր 6 Տրված են a, b, c դրական իրական թվերը: Ապացուցել, որ

$$\frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} + \frac{a^3}{c^2} \geq \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c}$$

Լուծում. Ունենք

$$\begin{aligned} \frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} + \frac{a^3}{c^2} - \left(\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} \right) &= \left(\frac{b^3}{a^2} - \frac{b^2}{a} \right) + \left(\frac{c^3}{b^2} - \frac{c^2}{b} \right) + \left(\frac{a^3}{c^2} - \frac{a^2}{c} \right) = \\ &= \frac{b^2(b-a)}{a^2} + \frac{c^2(c-b)}{b^2} + \frac{a^2(a-c)}{c^2} = \\ &= \left(a - b + \frac{b^2(b-a)}{a^2} \right) + \left(b - c + \frac{c^2(c-b)}{b^2} \right) + \left(c - a + \frac{a^2(a-c)}{c^2} \right) = \\ &= \frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a^2} + \frac{(b-c)(b^2-c^2)}{b^2} + \frac{(c-a)(c^2-a^2)}{c^2} = \\ &= \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2} + \frac{(b-c)^2(b+c)}{b^2} + \frac{(c-a)^2(c+a)}{c^2} \geq 0 \end{aligned}$$