Լուծումներ

8-րդ դասարան

Երկրորդ օր (16 փետրվարի, 2025թ)

Խնդիր 4 a, b, c բացասական իրական թվերի մասին հայտնի է, որ $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$: Գտնել $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ արտահայտության մեծագույն հնարավոր արժեքը:

Լուծում. Ձևափոխենք պայմանի առաջին հավասարությունը. $a^2 - bc = b^2 - ac \Rightarrow a^2 - b^2 = bc - ac \Rightarrow (a-b)(a+b) = (b-a)c$: $a+b$-ն և c բացասական են, ուստի հավասարությունը տեղի ունենալու համար պետք է $a-b$-ն և $b-a$-ն լինեն նույն նշանի, ինչը հնարավոր է միայն $a = b$ դեպքում: Նույն տրամաբանությամբ կարող ենք տրված պայմանի մյուս մասից ստանալ, որ $b = c$, այսպիսով $a = b = c$: Ուրեմն $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$ խնդրի պայմանին բավարարող ցանկացած a, b, c թվերի համար:

Խնդիր 5 Բնական թվերից կազմված M բազմության համար հայտնի է, որ M-ի ցանկացած երեք տարրից կարելի է ընտրել երկուսը, որոնց գումարը երկուսի բնական ցուցիչով աստիճան է: Գտնել M բազմության տարրերի քանակի հնարավոր մեծագույն արժեքը:

Լուծում. Երկու թվեր, որոնց գումարը ստացվում է 2-ի աստիճան, անվանենք լավ զույգ: Դիտարկենք բազմության մեծագույն թիվը՝ n-ը: Ապացուցենք, որ այն կարող է լինել առավելագույնը մեկ լավ զույգի մեջ: Ենթադրենք այն երկու լավ զույգի մեջ է: Դիցուք $m < k$ և $n+m$ և $n+k$ թվերը երկուսի աստիճաններ են: Այդ դեպքում $n+k \geq 2(n+m)$, ուստի $k \geq n+2m > n$, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ n-ը մեծագույնն էր: Նկատենք, որ այստեղից հետևում է նաև, որ ցանկացած m, n, k թվերի եռյակի համար $(m,n), (m,k), (k,n)$ զույգերը միաժամանակ չեն կարող լինել լավը:

Այժմ ապացուցենք, որ M-ի տարրերի քանակը 4-ից շատ չէ: Ենթադրենք հակառակը՝ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 թվերը M բազմության տարրեր են, ընդ որում a_5-ը մեծագույնն է: Քանի որ a_5-ը լավ զույգ է կազմում մյուս չորս թվերից առավելագույնը մեկի հետ, ապա առանց ընդհանրություն խախտելու կարող ենք համարել, որ այն լավ զույգ չի կազմում $a_1 < a_2 < a_3$ թվերից ոչ մեկի հետ: Քանի որ a_3-ը լավ զույգ չի կազմում a_1 և a_2 թվերից գոնե մեկի հետ (օրինակ a_1-ի), ապա վերցնելով (a_1, a_3, a_5) եռյակը, կտեսնենք որ լավ զույգ չկա, ինչը հակասում է խնդրին: Այսպիսով M-ի տարրերի քանակը 5-ից քիչ է:

Մնաց ցույց տալ, որ գոյություն ունի 4 տարրանոց այդպիսի բազմություն: Դրա համար բավարար է բերել ընդամենը մեկ օրինակ. $M = \{1, 3, 6, 10\}$:

Խնդիր 6 $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյունում հայտնի է, որ $\angle BAD + 2\angle ADC = 360°$ և $\angle BAD < 2\angle BCD$: Ապացուցել, որ $AB + AD > BC$:

Լուծում. BA ճառագայթի վրա վերցնենք P կետ այնպես, որ $AP = AD$ (A կետը գտնվում է B և P կետերի միջև): Նշանակենք $\angle BAD = 2\alpha$, այդ դեպքում $\angle APD = \angle ADP = \alpha$, և համաձայն խնդրի պայմանի՝ $\angle ADC = 180° - \alpha$, հետևաբար $\angle ADP + ADC = 180°$, այսինքն P, D, C կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Քանի որ $\angle BCD > \frac{\angle BAD}{2} = \angle BPC$, ուրեմն $BP > BC$, որտեղից էլ $BP = AB + AP = AB + AD > BC$: