

Լուծումներ

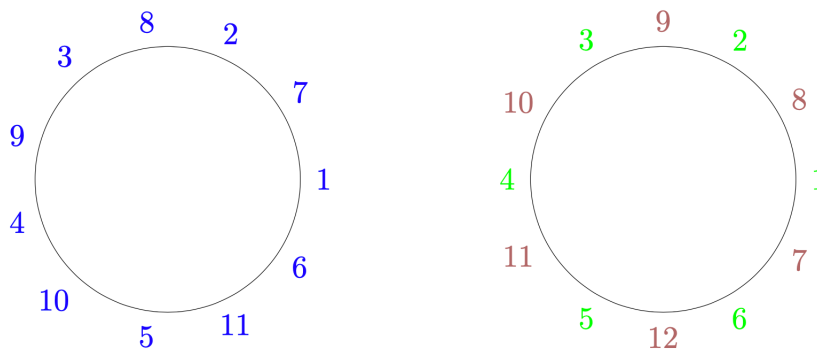
11-12-րդ դասարաններ

Երկրորդ օր (15 փետրվարի, 2026թ)

Խնդիր 4 Գտնել բոլոր $n > 2$ ամբողջ թվերը, որոնց համար հնարավոր է $1, 2, 3, \dots, n$ թվերը շրջանաձև դասավորել (յուրաքանչյուր թիվ պետք է օգտագործել ճիշտ մեկ անգամ) այնպես, որ ցանկացած երկու թիվ որոնց արանքում կա ճիշտ մեկ թիվ (կամ $n - 3$ թիվ) լինեն փոխադարձաբար պարզ:

Լուծում

Պատասխան. Բոլոր դրական կենտ թվերը և 4-ի բաժանվող թվերը:



Լուծում.

1. n -ը կենտ թիվ է:

Շրջանագծի վրա ինչ-որ կետում գրենք թիվ 1-ը և յուրաքանչյուր $\frac{2}{n}$ լրիվ պտույտից հետո (ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ) գրենք հաջորդ թիվը ըստ մեծության ($n = 11$ դեպքում տես. նկարում): Այս եղանակով 1-ից մինչև n բոլոր թվերը կգրվեն տարբեր կետերում: Վերցնելով շրջանագծի վրա որևէ թիվ և իրենից երկու դիրք հեռու գտնվող թիվը՝ մենք կունենանք կամ հաջորդական ամբողջ թվեր, կամ n և 1 թվերը: Երկու դեպքում էլ ընտրված թվերը փոխադարձաբար պարզ են:

2. n -ը բաժանվում է 4-ի:

Դիցուք $n = 2m$, որտեղ m -ը զույգ թիվ է: Կենտ դեպքի նման, շրջանագծի վրա գրենք 1-ից մինչև m թվերը, իսկ մնացած կետերում՝ $m + 1$ -ից մինչև n թվերը նույն հերթականությամբ ($n = 12$ դեպքում տես. նկարում): Վերցնելով որևէ թիվ և իրենից երկու դիրք հեռու գտնվող թիվը՝ մենք կունենանք կամ հաջորդական ամբողջ թվեր, կամ m և 1 թվերը, կամ n և $m + 1$ թվերը: Առաջին երկու դեպքերում թվերը փոխադարձաբար պարզ են: Բոլոր դեպքերում ընտրված թվերը փոխադարձաբար պարզ են (վերջին դեպքում պետք է օգտագործել m -ի զույգությունը):

3. n -ը բաժանվում է 2-ի, բայց չի բաժանվում 4-ի:

Դիցուք $n = 2m$, որտեղ m -ը կենտ թիվ է: Ենթադրենք, որ 1-ից մինչև n դրական ամբողջ թվերը գրված են շրջանաձև ինչ-որ հերթականությամբ: Թվերը բաժանենք երկու խմբի, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է m թիվ.

առաջին խումբը պարունակում է 1-ը և բոլոր այն թվերը, որոնց կարելի է հասնել նախորդից անցնելով իրենից երկու դիրք ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ գտնվող թվին, իսկ երկրորդ խումբը պարունակում է մնացած թվերը:

Բոլոր գրված թվերի մեջ կա m հատ զույգ թիվ, և դրանցից առնվազն կեսը պետք է պատկանի խմբերից ինչ որ մեկին: Քանի որ m -ը կենտ է, զույգ թվերի կեսից ավելին պատկանում է խմբերից ինչ-որ մեկին: Սա նշանակում է, որ այդ խմբում կան երկու հաջորդական զույգ թվեր, այսինքն՝ այդ երկու թվերի արանքում կա ճիշտ մեկ թիվ: Այդ երկու թվերը ունեն ընդհանուր բաժանարար 2: Հետևաբար, հնարավոր չէ 1-ից մինչև n թվերը դասավորել շրջանագծի վրա այնպես, որ յուրաքանչյուր թիվը փոխադարձաբար պարզ լինի իրենից երկու դիրք հեռու գտնվող թվի հետ:

Խնդիր 5 Տրված $k > 0$ ամբողջ թվի համար կասենք (a, b) դրական ամբողջ թվազույգը k -լավն է, եթե $a^k + 1$ բաժանվում է b -ի և $b^k + 1$ բաժանվում է a -ի: Գտնել բոլոր $k > 0$ ամբողջ թվերը որոնց համար գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ k -լավ թվազույգեր:

Լուծում Դիտարկենք $k = 1$: Ենթադրենք գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ k -լավ թվազույգեր՝ $(a_1, b_1), \dots$, որտեղ առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $a_j > b_j$ բոլոր $j > 0$ համար: Կունենք $\forall j > 0$ ճիշտ է $a_j + 1 \vdots b_j$ և $b_j + 1 \vdots a_j \Rightarrow a_j + 1 \geq b_j \geq a_j - 1$: Քանի որ $a_j + 1 - (a_j - 1) = 2$, ուրեմն $a_j + 1 - b_j \leq 2$ և $a_j + 1 \vdots b_j$, բայց հեշտ է ստուգել որ այդպիսի զույգերի քանակը վերջավոր է:

Եթե $k > 1$ կունենանք $(2, 2^k + 1)$ թվազույգը k -լավն է:

Ցույց տանք որ, եթե (a, b) թվազույգը k -լավն է և $a < b$, ապա $(b, \frac{b^k+1}{a})$ նույնպես լավն է և $a \neq \frac{b^k+1}{a}$: Քանի որ $a^k + 1 \vdots b$, ուրեմն a և b թվերը փոխադարձաբար պարզ են: Ունենք $b^k + 1 \vdots \frac{b^k+1}{a}$ և

$$\left(\frac{b^k+1}{a}\right)^k + 1 = \frac{(b^k+1)^k + a^k}{a^k} = \frac{b \cdot M + 1 + a^k}{a^k} \vdots b,$$

որտեղ օգտագործեցինք $(b^k + 1)^k$ արտահայտությունը b -ի բաժանելուց տալիս է 1 մնացորդ և $a^k + 1 \vdots b$: Մյուս կողմից $\frac{b^k+1}{a} > \frac{b^2}{a} \geq b > a$:

Հետևաբար գոյություն ունեն անվերջ քանակությամբ k -լավ թվազույգեր:

Ցանկացած $k > 1$ բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Խնդիր 6 Տրված է $n \geq 1$ ամբողջ թիվը: Ապացուցել, որ

$$P(x) = \sum_{k=1}^n (3(n-k) + 1)x^k + 2n$$

բազմանդամի ցանկացած արմատի մոդուլը մեծ է 1-ից:

Լուծում Նկատենք, որ $P(x) = (x+2)(x_{n-1} + 2x^{n-1} + \dots + (n-1)x) + n$: Քանի որ -2 -ի մոդուլը մեծ է մեկից, ապա մնաց ցույց տալ խնդրի պահանջը $Q(x) = x_{n-1} + 2x^{n-1} + \dots + (n-1)x + n$ բազմանդամի համար:

Դիտարկենք $(x-1)Q(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - n$ բազմանդամը: Վերցնենք նրա ցանկացած $z \neq 1$ արմատ և ենթադրենք $|z| \leq 1$: Կունենաք $n = |z^n + z^{n-1} + \dots + z| \leq |z|^n + |z|^{n-1} + \dots + |z| \leq n$ հետևաբար բոլոր տեղերը հավասարություններ են, ինչը տեղի կունենա միայն $z = 1$ դեպքում, որը հակասություն է: Քանի որ 1-ը $Q(x)$ բազմանդամի արմատ չէ, ուրեմն նրա բոլոր արմատների մոդուլը մեծ է 1-ից: